0001688541138999

神奈川大学

2011年 理系 第3問

数理 石井K

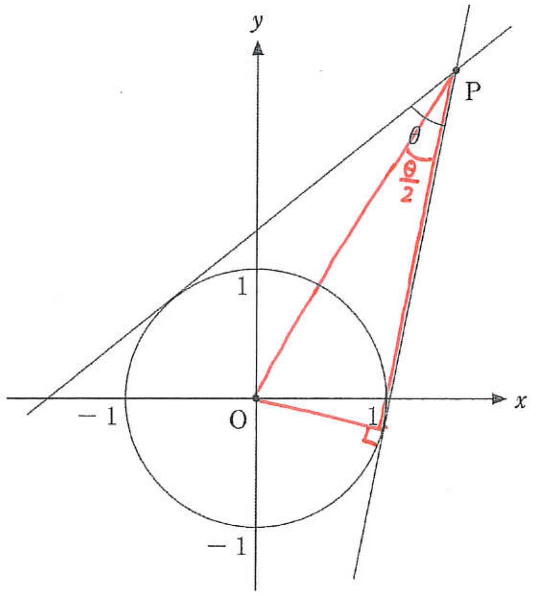
$\boxed{3}$ 座標平面上で，原点Oを中心とする半径1の円Cに，この円の外にある点Pから2本の接線をひき，それらのなす角のうちCを挟むものの大きさをθとする．さらに，線分OPの長さをrとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\cos\dfrac{\theta}{2}$ をrを用いて表せ．

(2) $\cos\theta$ をrを用いて表せ．

(3) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ を満たす点Pの軌跡を求めよ．

(4) $\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{2\pi}{3}$ を満たす点Pの存在する領域の面積を求めよ．



(1) 右図の直角三角形より．

$\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{r}$

$0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$ より．$\cos\frac{\theta}{2}>0$

$\therefore \cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}$

$=\underline{\dfrac{\sqrt{r^2-1}}{r}}$ //

(2) $\cos\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1$

$=\underline{1-\dfrac{2}{r^2}}$ //

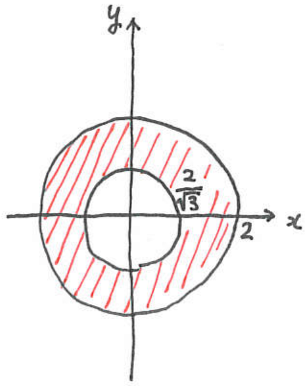
(3) (2)と $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ より．$r^2=4$

$r>0$ より．$r=2$

∴点Pの軌跡は．<u>中心が原点，半径2の円</u> //

(4) (3)と同様に $\theta=\frac{2\pi}{3}$ のとき．Pの軌跡は．中心が原点，半径 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ の円となるので，

∴領域は右図の斜線部分



$\therefore S=\pi\cdot 2^2-\pi\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\underline{\dfrac{8}{3}\pi}$ //