2016年 文系 第2問

$\boxed{2}$ 円 $C : x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$ と直線 $\ell : 2ax - y - 2a = 0$ について，以下の問いに答えよ．ただし，a は定数とする．

(1) C の中心の座標と半径を求めよ．

(2) C と ℓ が異なる2点P，Qで交わるときの，a の値の範囲を求めよ．

(3) a が(2)で求めた値の範囲を動くとき，線分PQの長さが $\sqrt{2}$ となる a の値を求めよ．

(1) $C : x^2 + (y-2)^2 = 1$

$\therefore$ $\underline{\text{中心}(0, 2),\ \text{半径}\ 1}$ //

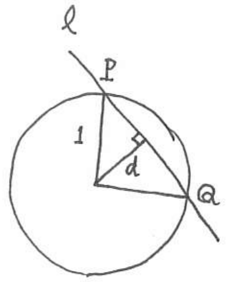
(2) 点と直線のキョリ公式より，円の中心 $(0, 2)$ と ℓ とのキョリ d は，

$$d = \frac{|0-2-2a|}{\sqrt{(2a)^2+(-1)^2}} = \frac{|2a+2|}{\sqrt{4a^2+1}}$$

C と ℓ が異なる2点で交わるとき，$d < r$ より，

$$\frac{|2a+2|}{\sqrt{4a^2+1}} < 1$$ 両辺2乗して，整理すると，$4a^2+8a+4 < 4a^2+1$

よって，$\underline{a < -\frac{3}{8}}$ //



(3) 右図において三平方の定理より

$$\left(\frac{PQ}{2}\right)^2 + d^2 = 1$$

$\therefore$ $PQ = \sqrt{2}$ より，$d^2 = \frac{1}{2}$

$$\therefore \quad \frac{4a^2+8a+4}{4a^2+1} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad 8a^2+16a+8 = 4a^2+1$$

$$4a^2+16a+7 = 0$$

$$\therefore \quad (2a+7)(2a+1) = 0$$

$a < -\frac{3}{8}$ より，$\underline{a = -\frac{7}{2},\ -\frac{1}{2}}$ //