信州大学

2015年 経済学部 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 放物線 $y = ax^2 + bx + c \ (a > 0)$ を C とし，直線 $y = 2x - 1$ を ℓ とする．

(1) 放物線 C が点 $(1,\ 1)$ で直線 ℓ と接し，かつ x 軸と共有点をもつための $a,\ b,\ c$ が満たす必要十分条件を求めよ．

(2) $a = \dfrac{8}{9}$ のとき，(1) の条件のもとで，放物線 C と直線 ℓ および x 軸とで囲まれた部分のうち，第1象限にある部分の面積を求めよ．

(1) C が $(1,1)$ を通ることより，$1 = a + b + c$　　$\therefore a + b + c = 1 \cdots ①$

$y' = 2ax + b$ なので $(1,1)$ における接線は，

$y = (2a+b)(x-1) + 1 \iff y = (2a+b)x - 2a - b + 1$

これが ℓ であることから，$2a + b = 2 \cdots ②$

① かつ ② $\iff b = -2a + 2,\ c = a - 1$

このとき C は，$y = ax^2 + (-2a+2)x + a - 1$ となる

$ax^2 + (-2a+2)x + a - 1 = 0$ の判別式を D とおくと，

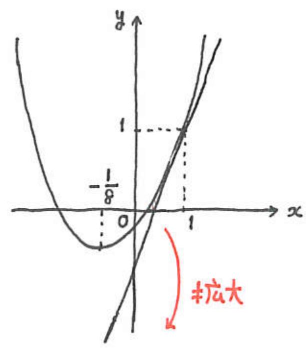
$D/4 = (-a+1)^2 - a(a-1) \geqq 0$　　$\therefore 0 < a \leqq 1$

以上より，必要十分条件は，$\underline{0 < a \leqq 1 \text{ かつ } b = -2a + 2 \text{ かつ } c = a - 1}$ //

(2) (1) より，$a = \frac{8}{9}$ のとき，$b = \frac{2}{9}$，$c = -\frac{1}{9}$

このとき，$C: y = \frac{8}{9}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{1}{9}$

$= \frac{8}{9}\left(x + \frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{8}$



C と x 軸の交点は，$\left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{4}, 0\right)$

$\therefore S = \int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{9}(8x^2 + 2x - 1)\,dx - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1$

$= \frac{1}{9}\left[\frac{8}{3}x^3 + x^2 - x\right]_{\frac{1}{4}}^{1} - \frac{1}{4}$

$= \frac{1}{9}\left(\frac{8}{3} - \frac{1}{24} - \frac{1}{16} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{4}$

$= \underline{\frac{1}{16}}$ //