0001831638618999

徳島大学

2014年 第4問

数理 石井K

4 次の問いに答えよ．

(1) 2次方程式 $x^2+2mx+m^2+2m-8=0$ が異なる2つの負の解をもつとき，定数 m の範囲を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ は初項1，公比 r $(0<r<1)$ の等比数列である．数列 $\{b_n\}$ は $a_{n+1}=\dfrac{(a_n)^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{b_n}}$ を満たす．数列 $\{b_n\}$ の一般項および無限級数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ の和を求めよ．

(1) 判別式を D とおくと，$D>0$，2つの解を α, β とおいたとき

$\alpha+\beta<0$ かつ $\alpha\beta>0$

$\therefore D/4 = m^2-(m^2+2m-8)$

$= -2m+8$

$\therefore -2m+8>0$

$\therefore m<4 \cdots ①$

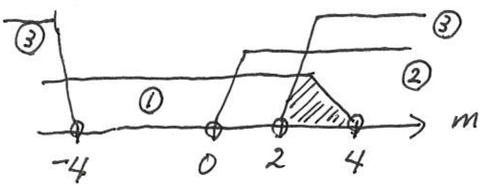
解と係数の関係から，

$\alpha+\beta=-2m<0 \quad \therefore m>0 \cdots ②$

$\alpha\beta = m^2+2m-8>0$

$\therefore (m+4)(m-2)>0$

$\therefore m>2,\ m<-4 \cdots ③$



$\therefore \underline{2<m<4}$ //

(2) $a_n = r^{n-1}$，

$\therefore a_{n+1}=\dfrac{(a_n)^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{b_n}}$ に代入して，$r^n = \dfrac{r^{\frac{4}{3}(n-1)}}{\sqrt{b_n}}$

$\therefore \sqrt{b_n} = r^{\frac{4}{3}(n-1)-n}$ $\quad \therefore$ 両辺2乗して．$\underline{b_n = r^{\frac{2}{3}n-\frac{8}{3}}}$ //

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} r^{\frac{2}{3}(n-4)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(r^{\frac{2}{3}}\right)^{n-4} = \dfrac{r^{-2}}{1-r^{\frac{2}{3}}} = \underline{\dfrac{1}{r^2\left(1-\sqrt[3]{r^2}\right)}}$ //

初項 r^{-2}，

公比 $r^{\frac{2}{3}}$ の等比数列の無限和

$0<r^{\frac{2}{3}}<1$