0001691188038999

金沢大学

2014 年 理系 第 2 問　　1枚目／2枚.

数理 石井K

$\boxed{2}$ 関数 $y = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ のグラフ C について，次の問いに答えよ．

(1) C の変曲点のうち，x 座標が最大となる点 P の x 座標を求めよ．

(2) (1) で求めた P の x 座標を b とするとき，

$$\tan\theta = e^b$$

をみたす θ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対し，$\tan 2\theta$ および θ の値を求めよ．

(3) 上の b に対する直線 $x = b$ と x 軸，y 軸および C で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1) $y' = -(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})^{-2}$　$\therefore$ $y' = 0$ となるのは，$x = 0$ のとき．

$$y'' = -(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})^{-2} - (e^x - e^{-x})\cdot(-2)(e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})^{-3}$$

$$= \frac{(e^x - e^{-x} + 2)(e^x - e^{-x} - 2)}{(e^x + e^{-x})^3}$$

$\therefore$ $y'' = 0$ となるのは，$e^x = -1 \pm \sqrt{2},\ 1 \pm \sqrt{2}$ のとき．

$e^x > 0$ より，$e^x = \sqrt{2} \pm 1$　$\therefore$ $x = \log(\sqrt{2} \pm 1)$

右の増減表より，P の x 座標は，

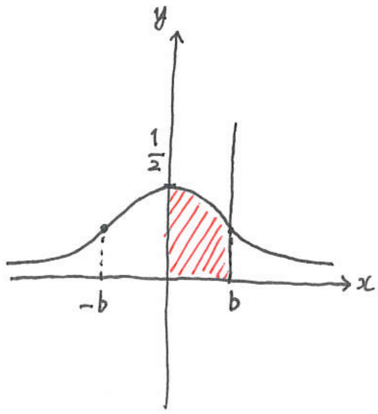
$\underline{x = \log(\sqrt{2}+1)}$ //

x	$\cdots$	$\log(\sqrt{2}-1)$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\log(\sqrt{2}+1)$	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↗		↗	$\frac{1}{2}$	↘		↘
		変曲点		極大		変曲点	

(2) $b = \log(\sqrt{2}+1)$ より $\tan\theta = e^{\log(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1$

$$\therefore \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2(\sqrt{2}+1)}{1-(\sqrt{2}+1)^2} = \underline{-1}\ //$$

$0 < 2\theta < \pi$ より，$2\theta = \dfrac{3}{4}\pi$　$\therefore$ $\underline{\theta = \dfrac{3}{8}\pi}$ //



(3) $S = \displaystyle\int_0^b \frac{1}{e^x + e^{-x}}\,dx$

$= \displaystyle\int_0^b \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,dx$　　$t = e^x$ とおいて置換積分

$dt = e^x dx$，$\begin{array}{c|c} x & 0 \to b \\ \hline t & 1 \to e^b = \sqrt{2}+1 \end{array}$

$= \displaystyle\int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2+1}$

2枚目につづく．

2014年 理系 第2問　　2枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 関数 $y = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$ のグラフ C について，次の問いに答えよ．

(1) C の変曲点のうち，x 座標が最大となる点Pの x 座標を求めよ．

(2) (1)で求めたPの x 座標を b とするとき，

$$\tan\theta = e^b$$

をみたす θ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対し，$\tan 2\theta$ および θ の値を求めよ．

(3) 上の b に対する直線 $x = b$ と x 軸，y 軸および C で囲まれた図形の面積を求めよ．

(3)のつづき.

$t = \tan\theta$ とおいて置換積分する　$dt = \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$，

t	$1 \to e^b$
θ	$\frac{\pi}{4} \to \frac{3}{8}\pi$

← (2)より

$$\therefore S = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi} d\theta$$

$$= \frac{\pi}{8}$$