0001977902208999

金沢大学

2015年 理系 第3問

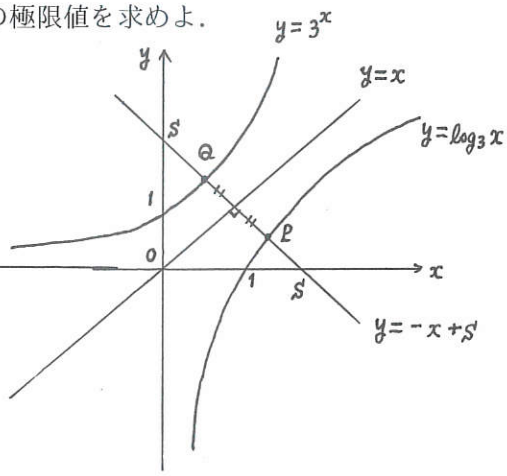
数理 石井K

$\boxed{3}$ 関数 $y=\log_3 x$ とその逆関数 $y=3^x$ のグラフが，直線 $y=-x+s$ と交わる点をそれぞれ $\mathrm{P}(t,\ \log_3 t)$，$\mathrm{Q}(u,\ 3^u)$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 線分 PQ の中点の座標は $\left(\dfrac{s}{2},\ \dfrac{s}{2}\right)$ であることを示せ．

(2) $s,\ t,\ u$ は $s=t+u,\ u=\log_3 t$ を満たすことを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{t\to 3}\frac{su-k}{t-3}$ が有限な値となるように，定数 k の値を定め，その極限値を求めよ．



(1) $y=\log_3 x$，$y=3^x$ は

$y=x$ に関して対称である

また，$y=-x+s$ と $y=x$ は垂直に交わる

このことから，線分 PQ の中点は $y=-x+s$ と $y=x$ の交点である．

$-x+s-x=0$ より，$x=\dfrac{s}{2}$　$\therefore\ y=\dfrac{s}{2}$

$\therefore$ 中点は $\left(\dfrac{s}{2},\dfrac{s}{2}\right)$ である ▨

(2) t,u を用いると線分 PQ の中点は $\left(\dfrac{t+u}{2},\ \dfrac{\log_3 t+3^u}{2}\right)$ と表される．

よって，(1)と x 座標を比較して，$\dfrac{s}{2}=\dfrac{t+u}{2}$　$\therefore\ s=t+u$ …①

y 座標を比較して，$\dfrac{s}{2}=\dfrac{\log_3 t+3^u}{2}$　$\therefore\ s=\log_3 t+3^u$ …②

ここで点 Q は $y=-x+s$ 上にあるので，$3^u=-u+s$　①を代入して，$3^u=t$

②に代入して，$t+u=\log_3 t+t$　$\therefore\ u=\log_3 t$

以上より，$s=t+u$，$u=\log_3 t$ ▨

(3) (2)より，$s=t+\log_3 t$，$u=\log_3 t$

$$\therefore\ \lim_{t\to 3}\frac{su-k}{t-3}=\lim_{t\to 3}\frac{\log_3 t\,(t+\log_3 t)-k}{t-3}$$

$t\to 3$ のとき不定形 $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ をとるので，(分子) $=3+1-k=0$　$\therefore\ \underline{k=4}$ //

そのとき，極限値は，$\displaystyle\lim_{t\to 3}\frac{(\log_3 t)^2+t\log_3 t-4}{t-3}$

底の変換公式を使った後微分した

これは $f(x)=(\log_3 t)^2+t\log_3 t$ としたときの $f'(3)$ であるから，$f'(x)=\dfrac{2\log t}{t(\log 3)^2}+\log_3 t+\dfrac{1}{\log 3}$

$$\therefore\ f'(3)=\frac{2}{3\log 3}+1+\frac{1}{\log 3}=\underline{1+\frac{5}{3\log 3}}\ //$$