0001978361208999

金沢大学

2015年 文系 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 座標平面上で，x 座標と y 座標がともに0以上の整数である点を，ここでは格子点とよぶ．格子点 $(0,\ 0)$ から格子点 $(k,\ \ell)$ へ，両端点がともに格子点であり長さが1の線分を用いて，格子点 $(0,\ 0)$ から順に最も少ない本数でつなぐ方法を数える．例えば，格子点 $(0,\ 0)$ から格子点 $(3,\ 1)$ へつなぐ方法の数は4である．次の問いに答えよ．

(1) 格子点 $(0,\ 0)$ から格子点 $(4,\ 0)$ へつなぐ方法の数と，格子点 $(0,\ 0)$ から格子点 $(2,\ 2)$ へつなぐ方法の数を，それぞれ求めよ．

(2) 条件 $k+\ell=5$ を満たす格子点 $(k,\ \ell)$ を考える．格子点 $(0,\ 0)$ から格子点 $(k,\ \ell)$ へつなぐ方法の数を，この条件を満たすすべての格子点について足し合わせた数を求めよ．

(3) 条件 $k+\ell=n$ $(n \geqq 1)$ を満たす格子点 $(k,\ \ell)$ を考える．格子点 $(0,\ 0)$ から格子点 $(k,\ \ell)$ へつなぐ方法の数を，この条件を満たすすべての格子点について足し合わせた数を n を用いて表せ．

(4) 条件 $k+\ell=n$（k と ℓ はともに偶数で，$n \geqq 2$）を満たす格子点 $(k,\ \ell)$ を考える．格子点 $(0,\ 0)$ から格子点 $(k,\ \ell)$ へつなぐ方法の数を，この条件を満たすすべての格子点について足し合わせた数を n を用いて表せ．

(1) $(0,0) \to (1,0) \to (2,0) \to (3,0) \to (4,0)$ の $\underline{1通り}$ //

$(0,0) \to (2,2)$ … 4回の移動のうち上が2回 $\therefore {}_4C_2 = \underline{6通り}$ //

(2) (1)と同様に考えて．${}_5C_0 + {}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5 = 2^5$ $\therefore$ $\underline{32}$ //

(3) ${}_nC_0 + {}_nC_1 + \cdots + {}_nC_n = \underline{2^n}$ //

(4) k, ℓ はともに偶数より n も偶数

$\therefore$ ${}_nC_0 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n$ …①

二項定理より，$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k x^k y^{n-k}$

これに $x=y=1$ を代入して，${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + {}_nC_4 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$ …②

$x=-1,\ y=1$ を代入して，${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - {}_nC_3 + {}_nC_4 - \cdots + {}_nC_n = 0$ …③

②+③より．$2({}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots + {}_nC_n) = 2^n$

$\therefore$ ①の値は．$\underline{2^{n-1}}$ //