2012年 第3問

$\boxed{3}$ n を3以上の整数とする．xyz 空間の平面 $z=0$ 上に，1辺の長さが4の正 n 角形 P があり，P の外接円の中心をGとおく．半径1の球 B の中心が P の辺に沿って1周するとき，B が通過してできる立体を K_n とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) P の隣り合う2つの頂点 $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ をとる．Gから辺 $\mathrm{P_1P_2}$ に下ろした垂線と $\mathrm{P_1P_2}$ との交点をQとするとき，$\mathrm{GQ}>1$ となることを示せ．

(2) 次の各問に答えよ．

(i) K_n を平面 $z=t$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ で切ったときの断面積 $S(t)$ を t と n を用いて表せ．

(ii) K_n の体積 $V(n)$ を n を用いて表せ．

(3) Gを通り，平面 $z=0$ に垂直な直線を ℓ とする．K_n を ℓ のまわりに1回転させてできる立体の体積 $W(n)$ を n を用いて表せ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{V(n)}{W(n)}$ を求めよ．