



2017年理系第4問

4 数列  $\{a_n\}$  を

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{7}{a_n} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $a_n > \sqrt{7}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) が成り立つことを示せ。
- (2) 数列  $\{b_n\}$  を

$$b_n = \frac{a_n - \sqrt{7}}{a_n + \sqrt{7}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定めるとき、 $b_{n+1} = b_n^2$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) が成り立つことを示せ。

- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  と  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \log(a_n - \sqrt{7})$  を求めよ。