2015年 理系 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 四面体OABCにおいて，3つのベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$はどの2つも互いに垂直であり，$h>0$に対して，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1,\quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2,\quad |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=h$$

とする．3点O，A，Bを通る平面上の点Pは，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$が$\overrightarrow{\mathrm{CA}}$と$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$のどちらとも垂直となる点であるとする．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$とするとき，$\alpha$と$\beta$を$h$を用いて表せ．

(2) 直線OPと直線ABが直交していることを示せ．

(3) △PABは，辺ABを底辺とする二等辺三角形ではないことを示せ．

(1) $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$

また，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}&=(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})\\&=\alpha|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2\\&=\alpha+h^2\end{aligned}$$

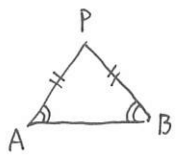
$\therefore$ $\overrightarrow{CP}\perp\overrightarrow{CA}$ より，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}=0$ $\therefore$ $\alpha+h^2=0$ $\quad\therefore$ $\alpha=-h^2$

同様に，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CB}=\beta|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2=4\beta+h^2$ $\quad\therefore$ $\beta=-\frac{1}{4}h^2$

以上より，$\underline{\alpha=-h^2,\ \beta=-\frac{1}{4}h^2}$ //

(2)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}&=(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\\&=-\alpha|\overrightarrow{OA}|^2+\beta|\overrightarrow{OB}|^2\\&=h^2\cdot1-\frac{1}{4}h^2\cdot4\\&=0\end{aligned}$$

$\therefore$ $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{AB}$ $\blacksquare$



(3) $|\overrightarrow{AP}|^2=|\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=(\alpha-1)^2|\overrightarrow{OA}|^2+\beta^2|\overrightarrow{OB}|^2=\alpha^2-2\alpha+1+4\beta^2$

$|\overrightarrow{BP}|^2=|\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OB}|^2=\alpha^2|\overrightarrow{OA}|^2+(\beta-1)^2|\overrightarrow{OB}|^2=\alpha^2+4\beta^2-8\beta+4$

$\therefore$ $|\overrightarrow{AP}|^2-|\overrightarrow{BP}|^2=-2\alpha+8\beta-3=2h^2-2h^2-3=-3\neq0$

$\therefore$ $|\overrightarrow{AP}|\neq|\overrightarrow{BP}|$ より △PABは辺ABを底辺とする二等辺三角形ではない $\blacksquare$