0002194185087999

金沢大学

2016年 文系 第1問

$\boxed{1}$ 座標空間内に3点O(0, 0, 0), A(3, 3, 0), B(0, 6, 0)をとり，さらに $1 < a < 3$ を満たす定数 a に対して点P$(t,\ ta,\ ta)$をとる．ただし，t は $t > 0$ の範囲を動くものとする．次の問いに答えよ．

(1) 点Pから xy 平面に垂線PHを下ろす．点Hの座標を求めよ．

(2) 点Hが線分AB上にあるときの t の値を求め，そのときの点Hの座標を a を用いて表せ．

以下，点Hは線分AB上にあるとする．

(3) 点Mを線分ABの中点とする．AH : HMの比の値 $\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HM}}$ を求めよ．

(4) 四面体OPMHの体積が2となるような a の値を求めよ．

(1) Hは xy 平面上の点より，H$(x, y, 0)$ とする

$\overrightarrow{PH} \perp xy$ 平面より，$\overrightarrow{PH}\cdot(1,0,0)=0$ かつ $\overrightarrow{PH}\cdot(0,1,0)=0$

よって，$x=t$，$y=ta$ $\quad\therefore$ $\underline{\mathrm{H}(t, ta, 0)}$ // ← すぐに答えをかいていてもO.K.

(2) 点Hが線分AB上にある $\iff \overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}$ $(0 \leqq s \leqq 1)$

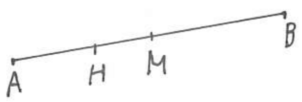
$\iff \overrightarrow{OH}=(3-3s, 3+3s, 0)$

$\therefore$ (1)の結果より，$t=3-3s$ かつ $ta=3+3s$

$\therefore (a+1)t=6 \qquad \therefore$ $\underline{t=\dfrac{6}{a+1},\ \mathrm{H}\left(\dfrac{6}{a+1}, \dfrac{6a}{a+1}, 0\right)}$ //

(3) (2)において，$s=1-\dfrac{t}{3}=\dfrac{a-1}{a+1}$ $\quad\therefore 0<s<\dfrac{1}{2}$ ($\because 1<a<3$ より)

$\therefore \overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



$\therefore \dfrac{AH}{HM}=\dfrac{s}{\frac{1}{2}-s}=\dfrac{2(a-1)}{a+1-2(a-1)}=\underline{\dfrac{2a-2}{3-a}}$ //

(4) 四面体OABPの体積を V とおくと．

$$V=\frac{1}{3}\times\triangle OAB\times ta$$
$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\times\frac{6a}{a+1}$$
$$=\frac{18a}{a+1}$$

四面体OPMHの体積は V の $\dfrac{HM}{AB}$ 倍であるから．$\dfrac{18a}{a+1}\cdot\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{a-1}{a+1}\right)=2 \iff \dfrac{9a(3-a)}{(a+1)^2}=2$

$\therefore (11a-1)(a-2)=0 \qquad 1<a<3$ より．$\underline{a=2}$ //