



2017年理系第4問

4 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{7}{a_n} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $a_n > \sqrt{7}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを示せ。
- (2) 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = \frac{a_n - \sqrt{7}}{a_n + \sqrt{7}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定めるとき、 $b_{n+1} = b_n^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを示せ。

- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \log(a_n - \sqrt{7})$ を求めよ。