九州歯科大学

2016年 歯学部 第1問

1 次の問いに答えよ．

(1) $5\sin\theta\cos\theta = 2$ のとき，$A = \tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta}$，$B = (\sin\theta)^4 + (\cos\theta)^4$，$C = (\sin\theta)^8 + (\cos\theta)^8$ の値を求めよ．

(2) 等比数列 $\{a_n\}$ の初項を $a_1 = \alpha$，公比を r とする．自然数 n に対して，$b_n = \log_3 a_n$ とおく．数列 $\{b_n\}$ が初項 $b_1 = 4$，公差 $d = -2$ の等差数列となるとき，α と r の値を求めよ．また，$\beta = 8\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の値を求めよ．ただし，$\alpha > 0$，$r > 0$ とする．

(3) 定積分 $I = \int_{-2}^{3}(3\sqrt{x^4 - 6x^2 + 9} - 4x)\,dx$ の値を求めよ．

(1) $A = \tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta}$

$= \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \dfrac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$= \dfrac{1}{\frac{2}{5}}$

$= \underline{\dfrac{5}{2}}$ //

$B = (\sin\theta)^4 + (\cos\theta)^4$

$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 2(\sin\theta\cos\theta)^2$

$= 1^2 - 2\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^2$

$= 1 - \dfrac{8}{25}$

$= \underline{\dfrac{17}{25}}$ //

$C = (\sin\theta)^8 + (\cos\theta)^8$

$= (\sin^4\theta + \cos^4\theta)^2 - 2(\sin\theta\cos\theta)^4$

$= B^2 - 2\cdot\left(\dfrac{2}{5}\right)^4$

$= \dfrac{289}{625} - \dfrac{32}{625}$

$= \underline{\dfrac{257}{625}}$ //

(2) $a_n = \alpha\cdot r^{n-1}$

$\therefore b_n = \log_3 \alpha\cdot r^{n-1} = \log_3\alpha + (n-1)\log_3 r$

∴ これが初項4，公差-2の等差数列となるので，$\log_3\alpha = 4$ かつ $\log_3 r = -2$

$\therefore \underline{\alpha = 81,\ r = \dfrac{1}{9}}$ //

$\beta = 8\sum_{n=1}^{\infty} 81\cdot\left(\dfrac{1}{9}\right)^{n-1} = 8\cdot\dfrac{81}{1-\frac{1}{9}} = \underline{729}$ //

$|r| < 1$ より，収束する．

(3) $I = \int_{-2}^{3}\left(3\sqrt{(x^2-3)^2} - 4x\right)dx$

$= \int_{-2}^{3}\left(3|x^2-3| - 4x\right)dx$

$= \int_{-2}^{-\sqrt{3}} 3(x^2-3) - 4x\,dx + \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} 3(3-x^2) - 4x\,dx + \int_{\sqrt{3}}^{3} 3(x^2-3) - 4x\,dx$

$= \left[x^3 - 9x - 2x^2\right]_{-2}^{-\sqrt{3}} + \left[9x - x^3 - 2x^2\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} + \left[x^3 - 9x - 2x^2\right]_{\sqrt{3}}^{3}$

$= 6\sqrt{3} - 8 + 12\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 12$

$= \underline{24\sqrt{3} - 20}$ //