2010年 第3問　1枚目／2枚

数理 石井K

3 整数の値をとる整数 n の関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$f(n)=\frac{1}{2}n(n+1),\quad g(n)=(-1)^n$$

で定め，その合成関数を $h(n)=g(f(n))$ とする．さらに，1つのさいころを4回振って，出た目の数を順に j, k, l, m として $a=h(j)$, $b=h(k)$, $c=h(l)$, $d=h(m)$ とおき，関数

$$P(x)=ax^3-3bx^2+3cx-d$$

を考える．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $n=1, 2, 3, 4, 5, 6$ に対して，$h(n)$ の値を求めなさい．
(2) $P(x)$ がある点で極値をとる関数になる確率を求めなさい．
(3) $P(x)$ が点 $(1,\ P(1))$ を変曲点に持つ関数になる確率を求めなさい．
(4) $P(x)$ が $P(1)=P'(1)=P''(1)=0$ を満たす関数になる確率を求めなさい．

(1) $f(1)=1$, $f(2)=3$, $f(3)=6$, $f(4)=10$
$f(5)=15$, $f(6)=21$
よって．$\underline{h(1)=h(2)=h(5)=h(6)=-1}$ //
$\underline{h(3)=h(4)=1}$ //

(2) $P'(x)=3(ax^2-2bx+c)$　$a\neq 0$ であるから．

$P(x)$ が極値をとる $\Leftrightarrow$ $P'(x)=0$ の判別式 $D>0$ (等号は含まない)

$\therefore D/4=b^2-ac>0$　ここで $b^2=\{h(k)\}^2=1$ より

$ac<1 \Leftrightarrow (a,c)=(1,-1)$ または $(-1,1)$

$\therefore \frac{2}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{4}{6}\times\frac{2}{6}=\underline{\frac{4}{9}}$ //

(3) $P(x)$ が $(1, P(1))$ を変曲点にもつ $\Leftrightarrow P''(1)=0$

$P''(x)=6(ax-b)$

$\therefore P''(1)=0 \Leftrightarrow a=b$

$\therefore \left(\frac{2}{6}\right)^2+\left(\frac{4}{6}\right)^2=\underline{\frac{5}{9}}$ //

0000116273889999

首都大学東京

2010年第3問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ 整数の値をとる整数nの関数$f(x)$，$g(x)$を

$$f(n)=\frac{1}{2}n(n+1),\quad g(n)=(-1)^n$$

で定め，その合成関数を$h(n)=g(f(n))$とする．さらに，1つのさいころを4回振って，出た目の数を順にj，k，l，mとして$a=h(j)$，$b=h(k)$，$c=h(l)$，$d=h(m)$とおき，関数

$$P(x)=ax^3-3bx^2+3cx-d$$

を考える．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$に対して，$h(n)$の値を求めなさい．

(2) $P(x)$がある点で極値をとる関数になる確率を求めなさい．

(3) $P(x)$が点$(1,\ P(1))$を変曲点に持つ関数になる確率を求めなさい．

(4) $P(x)$が$P(1)=P'(1)=P''(1)=0$を満たす関数になる確率を求めなさい．

(4) $P''(x)=6(ax-b)$

$\therefore P(1)=P'(1)=P''(1)=0 \iff a-b=0$ かつ $a-2b+c=0$ かつ $a-3b+3c-d=0$

$\iff a=b$ かつ $a=c$ かつ $a=d$

$\iff a=b=c=d=\pm 1$

$\therefore \left(\frac{2}{6}\right)^4+\left(\frac{4}{6}\right)^4=\underline{\frac{17}{81}}$ //