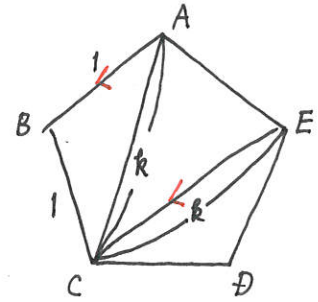


2014年 海洋工 第1問


 数理解石井K

1 1辺の長さが1である正五角形 ABCDE において、 $\vec{AB} = \vec{a}$ 、 $\vec{AE} = \vec{b}$ とし、線分 AC の長さを k とする。

- (1) \vec{AC} を \vec{a} 、 \vec{b} 、 k を用いて表せ。ただし、線分 AB と線分 EC が平行であることを用いてよい。
 (2) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を k を用いて表せ。
 (3) k の値を求めよ。
 (4) $\cos \angle BAE$ の値を求めよ。



(1) $AB \parallel EC$ を用いると、 $\vec{EC} = k \vec{AB}$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{AC} &= \vec{AE} + \vec{EC} \\ &= k \vec{a} + \vec{b} \end{aligned}$$

(2) $\angle BAE = \theta$ とおくと余弦定理より。

$$k^2 = 1 + 1 - 2 \cdot \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = \frac{2 - k^2}{2} \quad \dots (*)$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2 - k^2}{2} = \frac{2 - k^2}{2} \quad \left(-\frac{1}{2k} \text{ でもよい} \right)$$

(3) (1) より、 $|\vec{AC}|^2 = k^2 = k^2 + 1 + 2k \vec{a} \cdot \vec{b}$

$|\vec{AC}| = k$ と (2) より、 $1 + 2k - k^3 = 0$ $\therefore (k+1)(k^2 - k - 1) = 0$

$k > 0$ より、 $k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

案は、(2)の式から、 $1 - \frac{1}{2}k^2 = -\frac{1}{2k}$ となるので

(2) は 2通りの答え方ができる

(4) (2) の (*) に (3) の結果を代入して

$$\cos \angle BAE = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$$