

2015年理系2第5問

5 次の条件によって定められる関数 $f_n(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を考える.

$$f_1(x) = (3x + 5)e^{2x}, \quad f_{n+1}(x) = f_n'(x) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) $f_2(x) = (\text{ア} x + \text{イウ})e^{2x}$ である.

(2) $f_n(x) = (a_n x + b_n)e^{2x}$ (a_n, b_n は定数) とおくと,

$$a_1 = \text{エ}, \quad b_1 = \text{オ}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \text{カ} a_n \\ b_{n+1} = a_n + \text{キ} b_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

である.

(3) $a_n = \text{ク} \cdot \text{ケ}^{n-1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) である.

(4) $c_n = \frac{b_n}{2^n}$ とおくと, $c_{n+1} = c_n + \frac{\text{コ}}{\text{サ}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) である. よって, $c_n = \frac{\text{シ} n + \text{ス}}{\text{セ}},$

つまり $b_n = \text{ソ}^{n-2} (\text{タ} n + \text{チ})$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) である. ゆえに

$$f_n(x) = \text{ツ}^{n-2} (\text{テ} x + \text{ト} n + \text{ナ}) e^{2x} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

である.