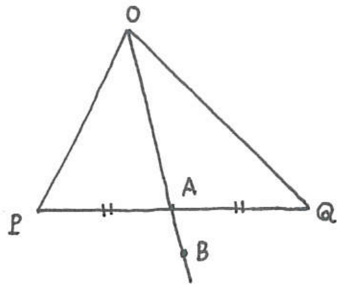
0001322637768999

岩手大学

2013年 教育学部 第4問

$\boxed{4}$ 平面上の一直線上にない3点O，P，Qを考える．線分PQの中点をAとし，Oを端点としAの方向に伸びた半直線OA上の点をBとする．点Bが $|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|=1$ を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ を $\overrightarrow{OP}$ および $\overrightarrow{OQ}$ を用いて表せ．
(2) ベクトル $\overrightarrow{OB}$ を $\overrightarrow{OP}$ および $\overrightarrow{OQ}$ を用いて表せ．
(3) $|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OQ}|=1$ のとき，$\overrightarrow{BP}$ と $\overrightarrow{OP}$ の内積を求めよ．



(1) $\underline{\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OQ}}$ //

(2) 3点O，A，Bは同じ半直線OA上にあるから

$\overrightarrow{OB}=k\overrightarrow{OA}$ （kは正の実数）と表せて，

$|\overrightarrow{OB}|=k|\overrightarrow{OA}|$

$\because |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|=1$ より，$k|\overrightarrow{OA}|^2=1$ $\quad \therefore k=\dfrac{1}{|\overrightarrow{OA}|^2}=\dfrac{1}{|\frac{1}{2}\overrightarrow{OP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OQ}|^2}=\dfrac{4}{|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|^2}$

$\therefore \overrightarrow{OB}=\dfrac{4}{|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|^2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OQ}\right)=\underline{\dfrac{2}{|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|^2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})}$ //

(3) $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{OP}=\left\{\overrightarrow{OP}-\dfrac{2}{|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|^2}(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})\right\}\cdot\overrightarrow{OP}$

$=|\overrightarrow{OP}|^2-\dfrac{2}{|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}|^2}(|\overrightarrow{OP}|^2+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ})$ $\cdots(*)$

ここで，$|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OQ}|=1$ より，

$(*)=1-\dfrac{2}{2+2\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}(1+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ})$

$=0$ ▨