

2017年 医学部 第10問

増田

10 点 $A(3, 2)$ と円 $C: x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ 上の点 Q について考える. 線分 AQ の中点を P とする. 点 P の軌跡によって囲まれる領域の面積を S とする. $\frac{7S}{\pi}$ の値を求めよ.

$$\text{円 } C: x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$$

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 4 \quad \dots \textcircled{1}$$

中心 $(-2, 1)$ 、半径 2 の円

点 Q の座標を (x, y) 、点 P を (X, Y) とおくと、

点 P は AQ の中点なので

$$X = \frac{x+3}{2}, \quad Y = \frac{y+2}{2}$$

$$x = 2X - 3, \quad y = 2Y - 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

①に②を代入して

$$(2X - 3 + 2)^2 + (2Y - 2 - 1)^2 = 4$$

$$4\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(Y - \frac{3}{2}\right)^2 = 4$$

$$\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(Y - \frac{3}{2}\right)^2 = 1$$

点 P は $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 、半径 1 の円を描く。

$$S = 1 \times 1 \times \pi = \pi$$

$$\text{よって } \frac{7S}{\pi} = \frac{7 \times \pi}{\pi} = \underline{\underline{7}}$$