



2011年医(医)・理(数理・物理・地環)・工・歯第4問

4 $f(x)$ は数直線上の連続関数で、次の条件 (i) と (ii) をみたすものとする。

(i) $f(x)$ は周期1の周期関数、すなわち、すべての x で $f(x+1) = f(x)$ が成り立つ。

(ii) $\int_0^1 f(x) dx = 0$

次の各問いに答えよ。

(1) 条件 (i) と (ii) をみたす恒等的に0でない連続関数 $f(x)$ の例を1つ挙げよ。

(2) $F(x) = \int_0^x f(y) dy$ とおくと、 $F(x)$ も周期1の周期関数であることを示せ。

(3) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 $\frac{d}{dx} F(nx)$ を f を用いて表せ。

(4) 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = \int_0^1 x f(nx) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定める。 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ を示せ。