2015年 理系2 第5問

$\boxed{5}$ 次の条件によって定められる関数 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を考える.

$$f_1(x)=(3x+5)e^{2x},\quad f_{n+1}(x)=f_n{}'(x)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $f_2(x)=(\overset{6}{\boxed{\text{ア}}}\,x+\overset{13}{\boxed{\text{イウ}}})e^{2x}$ である.

(2) $f_n(x)=(a_nx+b_n)e^{2x}$ (a_n, b_n は定数) とおくと,

$$a_1=\overset{3}{\boxed{\text{エ}}},\quad b_1=\overset{5}{\boxed{\text{オ}}},\quad \begin{cases} a_{n+1}=\overset{2}{\boxed{\text{カ}}}\,a_n \\ b_{n+1}=a_n+\underset{2}{\boxed{\text{キ}}}\,b_n \end{cases} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である.

(3) $a_n=\overset{3}{\boxed{\text{ク}}}\cdot\overset{2}{\boxed{\text{ケ}}}^{\,n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ である.

(4) $c_n=\dfrac{b_n}{2^n}$ とおくと, $c_{n+1}=c_n+\dfrac{\boxed{\text{コ}}\ 3}{\boxed{\text{サ}}\ 4}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ である. よって, $c_n=\dfrac{\overset{3}{\boxed{\text{シ}}}\,n+\overset{7}{\boxed{\text{ス}}}}{\underset{4}{\boxed{\text{セ}}}}$,

つまり $b_n=\overset{2}{\boxed{\text{ソ}}}^{\,n-2}(\overset{3}{\boxed{\text{タ}}}\,n+\overset{7}{\boxed{\text{チ}}})$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ である. ゆえに

$$f_n(x)=\underset{2}{\boxed{\text{ツ}}}^{\,n-2}(\underset{6}{\boxed{\text{テ}}}\,x+\underset{3}{\boxed{\text{ト}}}\,n+\underset{7}{\boxed{\text{ナ}}})e^{2x}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

である.

(1) $f_2(x)=f_1'(x)=3\cdot e^{2x}+(3x+5)\cdot 2e^{2x}=\underline{(6x+13)e^{2x}}$ //

(2) $f_{n+1}(x)=(a_{n+1}x+b_{n+1})x^{2x}$, $f_n'(x)=a_ne^{2x}+(a_nx+b_n)\cdot 2e^{2x}=(2a_nx+a_n+2b_n)e^{2x}$ より,

$\underline{\begin{cases} a_{n+1}=2a_n \\ b_{n+1}=a_n+2b_n \end{cases}}$ // また, $f_1(x)=(a_1x+b_1)e^{2x}$ より, $\underline{a_1=3,\ b_1=5}$ //

(3) $\{a_n\}$ は初項3, 公比2の等比数列より, $\underline{a_n=3\cdot 2^{n-1}}$ //

(4) $\dfrac{b_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^{n+1}}+\dfrac{b_n}{2^n}$ $\therefore$ $\underline{c_{n+1}=c_n+\dfrac{3}{4}}$ //

$\therefore$ $\{c_n\}$ は初項 $\dfrac{b_1}{2^1}=\dfrac{5}{2}$, 公差 $\dfrac{3}{4}$ の等差数列 $\therefore c_n=\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{4}(n-1)$

$\therefore$ $\underline{c_n=\dfrac{3n+7}{4}}$ // つまり, $\dfrac{b_n}{2^n}=\dfrac{3n+7}{4}$ $\therefore$ $\underline{b_n=2^{n-2}\cdot(3n+7)}$ //

$\therefore$ $f_n(x)=\{3\cdot 2^{n-1}x+2^{n-2}\cdot(3n+7)\}e^{2x}$

$=\underline{2^{n-2}(6x+3n+7)e^{2x}}$ //