0001810729818999

2014 年 理系 1 第 3 問

数理
石井K

$\boxed{3}$ m を定数とする．O を原点とする座標平面において，円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=mx+4$ が異なる 2 点 A，B で交わっている．2 点 A，B の x 座標をそれぞれ α，β とする．

(1) $\alpha+\beta=\dfrac{\overset{-8}{\boxed{\text{アイ}}}\,m}{\underset{1}{\boxed{\text{ウ}}}+m^2}$，$\alpha\beta=\dfrac{\overset{12}{\boxed{\text{エオ}}}}{\underset{1}{\boxed{\text{ウ}}}+m^2}$ である．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\dfrac{\overset{4}{\boxed{\text{カ}}}\sqrt{m^2-\overset{3}{\boxed{\text{キ}}}}}{\sqrt{\underset{1}{\boxed{\text{ク}}}+m^2}}$ である．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ のとき，$m=\pm\sqrt{\underset{7}{\boxed{\text{ケ}}}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\underset{2}{\boxed{\text{コ}}}\sqrt{\underset{2}{\boxed{\text{サ}}}}$ である．

(1) $x^2+(mx+4)^2-4=0$ の解が $x=\alpha,\ \beta$ より．解と係数の関係から，

$(m^2+1)x^2+8mx+12=0$ $\quad\therefore\ \alpha+\beta=\dfrac{-8m}{m^2+1}$，$\alpha\beta=\dfrac{12}{m^2+1}$ //

(2) $A(\alpha,\ m\alpha+4)$，$B(\beta,\ m\beta+4)$ より．

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(m\alpha+4-m\beta-4)^2}=\sqrt{(m^2+1)(\alpha-\beta)^2}$$

ここで，$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\dfrac{64m^2}{(m^2+1)^2}-\dfrac{48}{m^2+1}=\dfrac{16(m^2-3)}{(m^2+1)^2}$

$$\therefore\ |\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\frac{16(m^2-3)}{m^2+1}}=\frac{4\sqrt{m^2-3}}{\sqrt{m^2+1}}$$ //

(3) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ より．$\alpha\beta+(m\alpha+4)(m\beta+4)=0$

$\therefore\ (m^2+1)\alpha\beta+4m(\alpha+\beta)+16=0$

$\therefore\ 12+4m\cdot\dfrac{-8m}{m^2+1}+16=0$ $\quad\therefore\ m^2=7$ $\quad\therefore\ m=\pm\sqrt{7}$ //

このとき (2) より $|\overrightarrow{AB}|=\dfrac{8}{2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ //