2014年 理系2 第5問

数理 石井K

5 原点をOとする座標平面において，次の極方程式で表される2つの曲線を考える．

$$r = f(\theta) = 3\cos\theta, \quad r = g(\theta) = 1 + \cos\theta$$

ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．また，極座標が $(f(\theta),\ \theta)$，$(g(\theta),\ \theta)$ である点をそれぞれP，Qとする．

(1) 点Pは，中心が直交座標で $\left(\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\ \boxed{ウ}\right)$ であり，半径が $\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ である円の周上を動く．

3 2 0 3 2

(2) 点 $\mathrm{P}(f(\theta),\ \theta)$ と点 $\mathrm{Q}(g(\theta),\ \theta)$ の間の距離は $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{カ}}$ および $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\pi$ のとき最小値 $\boxed{ケ}$ をとり，$\theta = \boxed{コ}$ のとき最大値 $\boxed{サ}$ をとる．

3 5 3 0 π 3

(3) 線分PQの中点が原点Oとなるとき，点Pの直交座標は $\left(\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{スセ}},\ \pm\dfrac{\boxed{ソ}\sqrt{\boxed{タチ}}}{\boxed{ツテ}}\right)$ である．

3 16 3 15 16

(1) P は直交座標で $x = 3\cos\theta\cdot\cos\theta$, $y = 3\cos\theta\cdot\sin\theta$

また，$x^2+y^2 = 9\cos^2\theta \quad \therefore x = \frac{1}{3}(x^2+y^2)$ なので，

$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad \therefore$ 中心 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$，半径 $\frac{3}{2}$ //

(2) $PQ^2 = \{3\cos\theta\cdot\cos\theta - (1+\cos\theta)\cos\theta\}^2 + \{3\cos\theta\cdot\sin\theta - (1+\cos\theta)\sin\theta\}^2$

$= 9\cos^4\theta + (1+\cos\theta)^2\cos^2\theta - 6\cos^3\theta(1+\cos\theta) + 9\cos^2\theta\sin^2\theta + (1+\cos\theta)^2\sin^2\theta - 6\cos\theta\sin^2\theta(1+\cos\theta)$

$= 9\cos^2\theta + (1+\cos\theta)^2 - 6\cos\theta(1+\cos\theta)$

$= (2\cos\theta - 1)^2$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$ および $\theta = \frac{5}{3}\pi$ のとき最小値 0，$\theta = \pi$ のとき最大値 3 //

(3) $P(3\cos^2\theta,\ 3\cos\theta\sin\theta)$，$Q((1+\cos\theta)\cos\theta,\ (1+\cos\theta)\sin\theta)$

$\therefore$ 中点は $\left(\dfrac{4\cos^2\theta+\cos\theta}{2},\ \dfrac{4\sin\theta\cos\theta+\sin\theta}{2}\right)$

これが原点になるとき，$\cos\theta(4\cos\theta+1) = 0$ かつ $\sin\theta(4\cos\theta+1) = 0$

$\therefore \cos\theta = -\frac{1}{4}$，$\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$

このとき P の座標は．$\left(\dfrac{3}{16},\ \pm\dfrac{3\sqrt{15}}{16}\right)$ //