0001668811338999

金沢工業大学

2013年 理系2 第6問

数理 石井K

$\boxed{6}$ 座標平面において，媒介変数 t の範囲が $0 \leqq t \leqq \pi$ であるサイクロイド

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t$$

を C とする．

(1) 曲線 C 上で y 座標が最大になる点を A とすると，A の座標は ($\boxed{ア}$ π , $\boxed{イ}$ 2) である．

(2) 直線 $y = x + k$ がこの曲線 C の $0 < t \leqq \pi$ の部分に接するのは $t = \dfrac{\pi}{\boxed{ウ}}$ 2 のときであり，その接点の座標は $\left(\dfrac{\pi}{\boxed{エ}} - \boxed{オ},\ \boxed{カ} \right)$ (エ 2，オ 1，カ 1) である．このとき，$k = \boxed{キ} - \dfrac{\pi}{\boxed{ク}}$ (キ 2，ク 2) である．

(3) 曲線 C と x 軸，および点 A を通り y 軸に平行な直線 ℓ で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\pi$ (ケ 3，コ 2) である．

(4) (2)の接線，x 軸および直線 ℓ とで囲まれた図形から (3) の図形を除いた部分の面積は $\dfrac{\pi^2}{\boxed{サ}} - \dfrac{\pi}{\boxed{シ}} + \boxed{ス}$ (サ 8，シ 2，ス 2) である．

(1) $\dfrac{dy}{dt} = \sin t$

$\therefore\ 0 \leqq t \leqq \pi$ で $\dfrac{dy}{dt} \geqq 0$ $\therefore$ y は t に関して単調増加なので，$\underline{A(\pi, 2)}$ // ← $t=\pi$ のとき．

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\sin t}{1-\cos t}$ $\qquad \therefore\ \dfrac{\sin t}{1-\cos t} = 1 \iff \sin t + \cos t = 1$

$\iff \underline{t = \dfrac{\pi}{2}}$ //

このとき，$x = \dfrac{\pi}{2} - 1$，$y = 1$ $\qquad \therefore$ 接点 $\underline{\left(\dfrac{\pi}{2} - 1, 1\right)}$ //

x	0	…	π
$\frac{dy}{dx}$		+	
y	0	↗	2

$\therefore$ 接線は．$y = 1 \cdot \left(x - \dfrac{\pi}{2} + 1\right) + 1$ $\qquad \therefore\ \underline{k = 2 - \dfrac{\pi}{2}}$ //

(3) $\dfrac{dx}{dt} = 1 - \cos t \geqq 0$，$\dfrac{dy}{dt} = \sin t \geqq 0$

また，$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\cos t(1-\cos t) - \sin t \cdot \sin t}{(1-\cos t)^2} = \dfrac{\cos t - 1}{(1-\cos t)^2} \leqq 0$

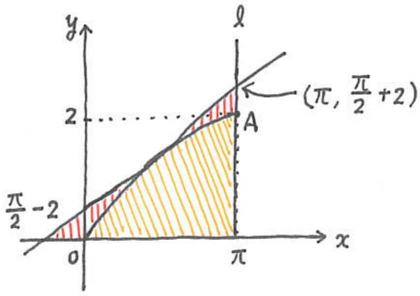
$\therefore\ S = \displaystyle\int_0^{\pi} y\,dx = \int_0^{\pi} (1-\cos t) \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt$

$\therefore\ S = \displaystyle\int_0^{\pi} (1-\cos t)^2\,dt$

$= \displaystyle\int_0^{\pi} 1 - 2\cos t + \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$

$= \left[\dfrac{3}{2}t - 2\sin t + \dfrac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\pi}$

$= \underline{\dfrac{3}{2}\pi}$ //



(4) $\left\{\pi - \left(\dfrac{\pi}{2} - 2\right)\right\} \cdot \left(\dfrac{\pi}{2} + 2\right) \cdot \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\pi = \underline{\dfrac{\pi^2}{8} - \dfrac{\pi}{2} + 2}$ //