

2016年薬学部第1問

1 次の問いに答えよ。

(1) 整式  $P(x)$  は実数を係数にもつ  $x$  の3次式であり、 $x^3$  の係数は1である。  $P(x)$  を  $x-7$  で割ると8余り、 $x-9$  で割ると12余る。方程式  $P(x) = 0$  は  $a+bi$  を解に持つ。  $a, b$  は1桁の自然数であり、 $i$  は虚数単位とする。

ただし  $a, b$  の組み合わせは、 $2a+b$  が連続する2つの整数の積の値と等しくなるもののうち、 $a-b$  が最大となるものとする。このとき、

(i) 整式  $P(x)$  を  $(x-7)(x-9)$  で割ると、余りは  $\boxed{1}x - \boxed{2}$  である。

(ii)  $a = \boxed{3}$ ,  $b = \boxed{4}$  であり、方程式  $P(x) = 0$  の実数解は  $\boxed{5}$  である。

(2)  $xy$  平面上に曲線  $C_1: y = -x^2 - x + 8$  がある。  $C_1$  上の動点  $A$  を点  $(1, 2)$  に関して対称移動した点  $B$  の軌跡を  $C_2$  とする。

$C_1$  と  $C_2$  の2つの交点  $P, Q$  の  $x$  座標をそれぞれ  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) とし、また、 $C_1, C_2$  と直線  $x = k$  との交点をそれぞれ  $R, S$  とする。ただし、 $k$  は  $\alpha < k < \beta$  を満たす実数とする。このとき、

(i)  $C_2$  の方程式は  $y = x^2 - \boxed{6}x + \boxed{7}$  である。

(ii) 三角形  $QRS$  の面積は  $k = \frac{\boxed{8}}{\boxed{9}}$  で最大となる。

(3)  $xy$  平面上に、原点  $O$  を中心とする単位円  $C$  と、 $y$  軸の正の部分の始線として点  $O$  を中心に回転する2つの動径  $L_1, L_2$  がある。円  $C$  と  $L_1, L_2$  との交点をそれぞれ  $P, Q$  とする。動径  $L_1, L_2$  の表す角をそれぞれ  $\theta_1, \theta_2$  とおき、 $\theta_1 = 2\pi t, \theta_2 = -\pi t$  とする。ただし  $t$  は、 $t \geq 0$  を満たす実数である。このとき、

(i) 点  $P$  と点  $Q$  が一致する  $t$  のうち、 $t = 0$  を除く最小の  $t$  の値は  $\frac{\boxed{10}}{\boxed{11}}$  である。

(ii) 点  $P$  の  $y$  座標と点  $Q$  の  $y$  座標の和の最小値は  $\frac{\boxed{12} \boxed{13}}{\boxed{14}}$  である。

(4) 直角三角形  $AOB$  ( $\angle AOB = 90^\circ$ ) に内接する半径  $r$  の円の中心を  $P$  とする。辺  $AB$  と円の接点を  $Q$  とし、線分  $AQ$  の長さを  $a$ 、線分  $BQ$  の長さを  $b$  とする。三角形  $AOB$  に対して、自然数  $l, m, n$  ( $n < m < l$ ) は、 $\vec{OP} + m\vec{AP} + n\vec{BP} = \vec{0}$  を満たす。このとき、

(i) 三角形  $AOB$  の3辺の長さの合計は  $\boxed{15}a + \boxed{16}b + \boxed{17}r$  である。

(ii)  $l = 17$  のとき、 $m = \boxed{18} \boxed{19}$ ,  $n = \boxed{20}$  であり、 $\frac{a}{b} = \frac{\boxed{21}}{\boxed{22} \boxed{23}}$  である。