



2014年工学部第4問

4 $\triangle A_1B_1C$ は、 $B_1C = \sqrt{2}$ 、 $\angle B_1A_1C = \frac{\pi}{2}$ 、 $\angle A_1B_1C = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) を満たす。下図のように、点 A_1 から辺 B_1C に下ろした垂線を A_1B_2 とし、点 B_2 から辺 A_1C に下ろした垂線を B_2A_2 とする。次に、点 A_2 から辺 B_1C に下ろした垂線を A_2B_3 とし、点 B_3 から辺 A_1C に下ろした垂線を B_3A_3 とする。この操作を繰り返し、辺 A_1C 上に点 A_2, A_3, A_4, \dots を、辺 B_1C 上に点 B_2, B_3, B_4, \dots を定める。自然数 n に対し、 $\triangle A_nB_nB_{n+1}$ の面積を S_n とし、これらの面積の総和を $T = \sum_{n=1}^{\infty} S_n$ とする。このとき、次の問いに答えよ。



- (1) $S_1 = \sin \theta \cos^3 \theta$ 、 $S_2 = \sin^5 \theta \cos^3 \theta$ を示し、一般項 S_n を求めよ。
- (2) $T = \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + \sin^2 \theta}$ を示せ。
- (3) θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、 T の最大値を求めよ。