

2011年医学部第3問

3 文字  $x, y, z$  の任意の整式  $A$  に対して、 $x, y, z$  をそれぞれ  $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$  に置き換えて得られる  $\theta$  の関数を  $\tilde{A}(\theta)$  で表す。例えば、

$$P = x^5 + z^4 - xyz \quad \text{ならば} \quad \tilde{P}(\theta) = \sin^5 \theta + \tan^4 \theta - \sin \theta \cos \theta \tan \theta,$$

$$P = x^2 + y^2, Q = 1 \quad \text{ならば} \quad \tilde{P}(\theta) = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 = \tilde{Q}(\theta)$$

である。ただし  $\theta$  の関数の定義域は  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ,  $\theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$  とする。

- (1)  $P$  を  $x, y, z$  の整式とする。  $\tilde{P}(\theta) = \tilde{Q}(\theta)$  となる  $y, z$  の整式  $Q$  が存在することを示せ。
- (2)  $P$  を  $x, y, z$  の整式とする。  $\tilde{P}(0) = \tilde{P}(\pi)$  ならば、  $\tilde{P}(\theta) = \tilde{Q}(\theta)$  となる  $x, z$  の整式  $Q$  が存在することを示せ。
- (3)  $P$  を  $x, y, z$  の整式とする。  $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}$  のとき、および  $\theta \rightarrow \frac{3\pi}{2}$  のとき、  $\tilde{P}(\theta)$  がそれぞれ収束するならば、  $\tilde{P}(\theta) = \tilde{Q}(\theta)$  となる  $x, y$  の整式  $Q$  が存在することを示せ。収束とは、一定の実数に限りなく近づくことである。