



2016年医(保健)・工学部第4問

教理
石井K

4 媒介変数 θ を用いて $x = \sqrt{2}\cos\theta$, $y = \sqrt{3}\sin\theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) で表される曲線を C とする.

- (1) C と x 軸との交点の座標を求めよ. また, C と y 軸との交点の座標を求めよ.
 (2) C 上の点 (x, y) に対して, $x - y$ のとる値の最大値および最小値と, そのときの x, y の値を求めよ.
 (3) C 上の点 (x, y) に対して, $(x + y)(x - y)$ のとる値の最大値および最小値と, そのときの x, y の値を求めよ.

$$\begin{aligned} (1) \quad y = 0 &\iff \sqrt{3}\sin\theta = 0 \\ &\iff \theta = 0, \pi, 2\pi \\ x = 0 &\iff \sqrt{2}\cos\theta = 0 \\ &\iff \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

よって, x 軸との交点は $(\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)$, y 軸との交点は $(0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3})$ //

$$\begin{aligned} (2) \quad x - y &= \sqrt{2}\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta \\ &= \sqrt{5} \left\{ \sin\theta \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) + \cos\theta \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \right\} \\ &= \sqrt{5} \sin(\theta + \alpha) \quad \left(\begin{array}{l} \text{ただし, } \alpha \text{ は } 0 \leq \alpha < 2\pi \text{ で} \\ \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \text{ をみたすものとする} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{最大値は } \sqrt{5} \text{ でそのとき } \theta = \frac{5}{2}\pi - \alpha \quad \text{このとき } \cos\theta &= \cos\left(\frac{5}{2}\pi - \alpha\right) = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ \sin\theta &= \sin\left(\frac{5}{2}\pi - \alpha\right) = \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

最小値も同様になると.

$$\text{最大値 } \sqrt{5} \left(x = \frac{2\sqrt{5}}{5}, y = -\frac{3\sqrt{5}}{5} \text{ のとき} \right), \text{ 最小値 } -\sqrt{5} \left(x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, y = \frac{3\sqrt{5}}{5} \text{ のとき} \right) //$$

$$\begin{aligned} (3) \quad (x + y)(x - y) &= x^2 - y^2 \\ &= 2\cos^2\theta - 3\sin^2\theta \\ &= 2 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} - 3 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ &= \frac{5}{2} \cos 2\theta - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\theta = 0, \pi, 2\pi$ のとき最大

$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ のとき最小

$$\therefore \text{最大値は } 2 \left((x, y) = (\pm\sqrt{2}, 0) \text{ のとき} \right), \text{ 最小値は } -3 \left((x, y) = (0, \pm\sqrt{3}) \text{ のとき} \right) //$$