



2012年理学部（数理）第3問

3  $n$  を自然数とする．このとき，次の問に答えよ．

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$  を求めよ．

(2)  $0 < r < 1$  とし， $S_n = 1 + 2r + 3r^2 + \cdots + nr^{n-1}$  とおく．

(i)  $S_n - rS_n$  を求めよ．

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n$  を求めよ．

(3)  $a > 0$ ， $b > 0$  に対して，不等式

$$a + b - \sqrt{ab} < \sqrt{a^2 + b^2} < a + b$$

が成り立つことを証明せよ．

(4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{1}{3^{2(k-1)}} + \frac{k^4}{n^6}}$  を求めよ．