

2013年第7問

7 2つの実数  $a, b$  は  $|2a| - 2 < b < 2$  をみたしている。このとき、 $x$  の4次方程式

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0 \quad \dots\dots(*)$$

を考える。

- (1)  $x \neq 0$  とする。  $z = x + \frac{1}{x}$  とおくと、方程式(\*)を  $z$  で表せ。
- (2) (1) で求めた  $z$  の方程式の解は、すべて絶対値が2以下の実数であることを示せ。
- (3) 複素数  $\alpha = p + qi$  ( $p, q$  は実数) に対し、 $\sqrt{p^2 + q^2}$  を複素数  $\alpha$  の「大きさ」ということにする。ただし  $i$  は虚数単位を表す。このとき、4次方程式(\*)の解はすべて虚数で、それらの大きさはすべて1であることを示せ。