



2014年工学部第2問

2  $0 < x < \pi$  で定義された関数  $f(x) = \frac{1}{\sin x}$  について、次の問いに答えよ。

- (1)  $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$  を求めよ。
- (2)  $f'(x)$  と  $f''(x)$  を求めよ。また、 $f''(x) > 0$  となることを示せ。これらの結果を増減表に書き、曲線  $y = f(x)$  のグラフの概形をかけ。
- (3)  $0 \leq t \leq 1$  に対し、 $0 < a \leq x < \pi$  を満たす任意の  $a$  と  $x$  を考えると、

$$tf(a) + (1-t)f(x) \geq f(at + (1-t)x)$$

が成り立つことを示せ。

- (4) 三角形 ABC のそれぞれの角を  $A, B, C$  とすると  $\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq 2\sqrt{3}$  が成り立つことを証明せよ。