2016 年 経済学部 第 2 問

$\boxed{2}$ 以下の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1=\frac{1}{10},\quad a_{n+1}=\frac{1}{100}a_n+\frac{1}{10}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ を $b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める．$\{b_n\}$ は等比数列で，初項を $\dfrac{1}{10^p}$，公比を $\dfrac{1}{10^q}$ とおくと，$p=\boxed{13}$，$q=\boxed{14}$ となる．ゆえに，$\{b_n\}$ の第 n 項を

$$b_n=\frac{1}{10^{rn+s}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とおくと，$r=\boxed{15}$，$s=\boxed{16}$ となる．さらに，$\{a_n\}$ の第 n 項は，

$$a_n=a_1+\sum_{k=\boxed{17}}^{n+\boxed{18}\boxed{19}} b_k=\frac{\dfrac{1}{10^t}\left(1-\dfrac{1}{10^{un}}\right)}{1-\dfrac{1}{10^v}}\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

と求められる．ここで，$t=\boxed{20}$，$u=\boxed{21}$，$v=\boxed{22}$ である．

(2) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{10^{2k}a_k a_{k+1}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく．関係式

$$\frac{b_k}{a_k a_{k+1}}=\frac{\boxed{23}\boxed{24}}{a_k}+\frac{\boxed{25}\boxed{26}}{a_{k+1}}\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を用いて計算すると，

$$S_n=\frac{10^w\left(1-\dfrac{1}{10^{xn}}\right)}{1-\dfrac{1}{10^{yn+z}}}$$

となる．ここで，$w=\boxed{27}$，$x=\boxed{28}$，$y=\boxed{29}$，$z=\boxed{30}$ である．

(3) $(100^{n+1}-1)S_n$ は $\boxed{31}\,n+\boxed{32}\boxed{33}$ 桁の整数になる．