鳥取大学

2016年 医（医） 第3問

3 曲線 $C: x^4 - 2xy + y^2 = 0$ に関して，以下の問いに答えよ．

(1) C 上の点で，x 座標が最大となる点と，y 座標が最大となる点をそれぞれ求めよ．

(2) C で囲まれた図形の面積を求めよ．

(1) $y^2 - 2xy + x^4 = 0$

$\therefore y = \dfrac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4x^4}}{2}$

$\therefore y = x \pm |x|\sqrt{1-x^2}$

$\therefore y = x \pm x\sqrt{1-x^2} \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$

$x=1$ のとき，$y=1$ であるから，x 座標が最大となる点は $\underline{(1, 1)}$ //

$y_+ = x + x\sqrt{1-x^2} \ (-1 \leqq x \leqq 1)$，$y_- = x - x\sqrt{1-x^2} \ (-1 \leqq x \leqq 1)$ とおくと，

$y_+' = 1 + \sqrt{1-x^2} + x \cdot \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$

$= 1 + \dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$

$\therefore y_+' = 0 \iff 2x^2 - 1 = \sqrt{1-x^2} \quad (-1 < x < 1)$

$\iff 4x^4 - 4x^2 + 1 = 1 - x^2$ かつ $2x^2 - 1 > 0$ かつ $-1 < x < 1$

$\iff x^2(4x^2 - 3) = 0$ かつ $\left(-1 < x < -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < 1\right)$

$\iff x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

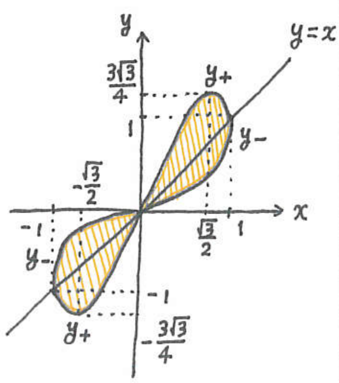
x	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	1
y_+'	／	$-$	0	$+$	0	$-$	／
y_+	-1	↘	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	1

左の増減表より

y 座標が最大となる点は $\underline{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)}$ //

(2) $y = x + x\sqrt{1-x^2}$ と $y = x - x\sqrt{1-x^2}$ のグラフは $y=x$ に関して対称であるから，

増減表より，右のグラフとなる．



$S = \displaystyle\int_{-1}^{0} y_- - y_+ \, dx + \int_0^1 y_+ - y_- \, dx$

$= \displaystyle\int_{-1}^{0} -2x\sqrt{1-x^2}\, dx + \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\, dx$

$= 4\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx$

$t = 1 - x^2$ とおいて置換積分すると，$dt = -2x \cdot dx$，$\begin{array}{c|c} x & 0 \to 1 \\ \hline t & 1 \to 0 \end{array}$

$S = 2\displaystyle\int_0^1 \sqrt{t}\, dt = 2\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \underline{\frac{4}{3}}$ //