# 県立広島大学

2012年 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ $k$を定数とする．関数 $f(\theta)=\cos 2\theta+4k\sin\theta+3k-3$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f\left(\frac{1}{2}\pi\right)$，$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)$ を求めよ．

(2) $x=\sin\theta$ として，$f(\theta)$ を $x$ で表せ．

(3) $-1\leqq k\leqq 1$ のとき，$f(\theta)$ の最大値を求めよ．

(4) すべての $\theta$ に対して常に $f(\theta)\leqq 0$ となる $k$ の値の範囲を求めよ．

(1) $f\left(\frac{1}{2}\pi\right)=\cos\pi+4k\sin\frac{\pi}{2}+3k-3=\underline{7k-4}$ //

$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\cos 3\pi+4k\sin\frac{3}{2}\pi+3k-3=\underline{-k-4}$ //

(2) $f(\theta)=1-2\sin^2\theta+4k\sin\theta+3k-3$

$=\underline{-2x^2+4kx+3k-2\quad(-1\leqq x\leqq 1)}$ //

(3) (2)より，$f(\theta)=-2(x-k)^2+2k^2+3k-2\ \cdots(*)$

$-1\leqq x\leqq 1$，$-1\leqq k\leqq 1$ より．頂点は範囲に含まれる．

よって，$f(\theta)$ の最大値は．$x=k$ のとき．$\underline{2k^2+3k-2}$ //

(4) (i) $-1\leqq k\leqq 1$ のとき．(3)より，$2k^2+3k-2\leqq 0$

$\therefore (2k-1)(k+2)\leqq 0\qquad \therefore -2\leqq k\leqq\frac{1}{2}$

$-1\leqq k\leqq 1$ であるから，$\quad -1\leqq k\leqq\frac{1}{2}$

(ii) $k>1$ のとき．

(*)より．$-1\leqq x\leqq 1$ での最大値は．$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=7k-4$ $\left(\because 0\leqq\theta<2\pi \text{ とすると，} x=1\Leftrightarrow\theta=\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore 7k-4\leqq 0$ より，$k\leqq\frac{4}{7}$

$\therefore k>1$ より．これは不適

(iii) $k<-1$ のとき．

(*)より．$-1\leqq x\leqq 1$ での最大値は $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-k-4$ $\left(\because 0\leqq\theta<2\pi \text{ とすると．} x=-1\Leftrightarrow\theta=\frac{3}{2}\pi\right)$

$\therefore -k-4\leqq 0$ より，$k\geqq -4$

$\therefore -4\leqq k<-1$

(i)～(iii)より．

$\underline{-4\leqq k\leqq\frac{1}{2}}$ //