

2014年 第3問

3 次の条件によって定められる数列  $\{a_n\}$  を考える.

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{2n(n+1)}{3n - a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、以下の問いに答えよ.

- (1) 不等式  $a_n < n$  を数学的帰納法によって証明せよ.
- (2) 数列  $\{b_n\}$  を  $b_n = \frac{n}{n - a_n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) で定める.  $b_{n+1}$  を  $b_n$  を用いて表せ.
- (3) 数列  $\{b_n\}$  の一般項を求めよ.
- (4) 数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ.
- (5) 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}$  および  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_2 a_3 a_4 \cdots a_n}{n!}$  を求めよ.