

2011年 理系学部 第2問

2 座標空間において、原点を  $O$  とし、点  $A(1, 0, 0)$  をとる。また、 $xy$  平面上にあり、中心が原点、半径が 1 の円を  $C$  とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $C$  の  $y \geq 0$  の部分にある点  $P$  について  $\angle AOP = t$  ( $0 \leq t \leq \pi$ ) とする。このとき、点  $P$  の座標を  $t$  を用いて表せ。
- (2) 点  $Q$  を  $\vec{OQ} = -\vec{OP}$  を満たす点とし、点  $B(\sqrt{3}, 1, 1)$  をとる。このとき、内積  $\vec{BP} \cdot \vec{BQ}$  を求めよ。また、 $|\vec{BP}|^2 = m - n \sin(t + \alpha)$  となるような定数  $m, n, \alpha$  (ただし、 $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ) を求めよ。
- (3)  $\angle PBQ = \theta$  とおくとき、 $\cos \theta$  の最大値と最小値、およびそれらのときの  $t$  の値を求めよ。
- (4)  $\cos \theta$  が上で求めた最小値をとるとき、三角形  $PBQ$  の面積を求めよ。