



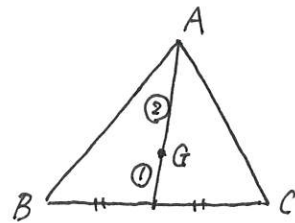
2014年教育学部第3問

3 鋭角三角形 ABC の重心を G とする。また、 $\vec{GA} = \vec{a}$, $\vec{GB} = \vec{b}$, $\vec{GC} = \vec{c}$ とおくとき

$$2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = -9$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a} = -3$$

を満たしているものとする。このとき、次の問いに答えよ。



(1) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ を示せ。

(2) ベクトル \vec{a} , \vec{b} の大きさ $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ を求めよ。

(3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$ のとき、 $\triangle ABC$ の3辺 AB, BC, CA の長さを求めよ。

$$(1) \vec{AG} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC} \right) = \frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{AC} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} &= -\frac{1}{3} \vec{AB} - \frac{1}{3} \vec{AC} + \vec{AB} - \left(\frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{AC} \right) + \vec{AC} - \left(\frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{AC} \right) \\ &= \vec{0} \quad \square \end{aligned}$$

(2) 与えられた2式を足すと、 $3\vec{a} \cdot \vec{b} + 3\vec{c} \cdot \vec{a} = -12$

$$\therefore \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = -4$$

(1)より $\vec{b} + \vec{c} = -\vec{a}$ より $|\vec{a}|^2 = 4 \quad \therefore \underline{|\vec{a}| = 2}$ //

上の式の2倍から下の式を引くと。

$$\vec{b} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = -5 \quad \therefore |\vec{b}|^2 = 5 \quad \therefore \underline{|\vec{b}| = \sqrt{5}}$$
 //

(3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$ のとき、与式より、 $\vec{c} \cdot \vec{a} = -2$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = -3$

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} \quad \therefore |\vec{AB}|^2 = |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 13 \quad \therefore \underline{|\vec{AB}| = \sqrt{13}}$$
 //

$$\vec{BC} = \vec{c} - \vec{b} \quad \therefore |\vec{BC}|^2 = |\vec{c}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$\because \vec{c} = -\vec{a} - \vec{b} \text{ より } |\vec{c}|^2 = 4 + 5 - 4 = 5 \quad \therefore |\vec{c}| = \sqrt{5}$$

$$\therefore |\vec{BC}|^2 = 16 \quad \therefore \underline{|\vec{BC}| = 4}$$
 //

$$\vec{CA} = \vec{a} - \vec{c} \quad \therefore |\vec{CA}|^2 = 4 + 5 + 4 = 13 \quad \therefore \underline{|\vec{CA}| = \sqrt{13}}$$
 //