

2015年 理工学部 第5問

5 袋に赤玉が2個と白玉が1個入っている。袋から玉を1個取り出し玉の色を見て袋に戻す。このとき取り出した玉と同色の玉をもう1つ袋に加える。この操作を繰り返して行う。

- (1) n 回目の操作を終えたとき、それまでに赤玉を取り出した回数が k 回 ($0 \leq k \leq n$) であったとする。このとき、 $n+1$ 回目の操作で赤玉を取り出す確率を $p_n(k)$ とおくと、 $p_n(k) = \square$ ナ となる。
- (2) n 回目の操作を終えるまでに赤玉を取り出す回数が k 回 ($0 \leq k \leq n$) である確率を $q_n(k)$ とおく。たとえば、 $q_1(1) = \frac{2}{3}$, $q_4(2) = \square$ ニ となる。 n 回の操作中 j 回目 ($1 \leq j \leq n$) だけ赤玉を取り出し、その他の操作では白玉を取り出す確率は \square ヌ であり、 $q_n(1) = n \times \square$ ヌ となる。 $q_n(k)$ を n と k を用いて表すと、 $q_n(k) = \square$ ネ となる。
- (3) n 回目の操作を終えるまでに赤玉を取り出す回数が k 回 ($0 \leq k \leq n$) であり、 $n+1$ 回目の操作で赤玉を取り出す確率は、(1) と (2) で定めた $p_n(k)$ と $q_n(k)$ を用いて $q_n(k)p_n(k)$ となる。このことから、 $n+1$ 回目に赤玉を取り出す確率を計算すると \square ノ となる。
- (4) $f(x) = e^{-x^2}$ とする。 S_n を (1) と (2) で定めた $p_n(k)$ と $q_n(k)$ を用いて

$$S_n = \sum_{k=0}^n f(p_n(k))q_n(k)$$

とおくと、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \square$ ハ となる。