0002002277997999

2015年 薬学部 第1問

1枚目／3枚

解答は 2枚目から

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ.

(1) 次の問いに答えよ.

(i) $f(x,\ y) = 2x^2 + 11xy + 12y^2 - 5y - 2$ を因数分解すると,

$$(x + \overset{4}{\boxed{\ 1\ }}\,y + \overset{1}{\boxed{\ 2\ }})(\overset{2}{\boxed{\ 3\ }}\,x + \overset{3}{\boxed{\ 4\ }}\,y - \overset{2}{\boxed{\ 5\ }})$$

である.

(ii) $f(x,\ y) = 56$ を満たす自然数 x, y の値は, $x = \overset{3}{\boxed{\ 6\ }}$, $y = \overset{1}{\boxed{\ 7\ }}$ である.

(2) xy 平面上の2直線 $y = x + 4\sin\theta + 1$, $y = -x + 4\cos\theta - 3$ の交点をPとおく. ただし, θ は実数とする.

(i) $\theta = \dfrac{\pi}{12}$ のとき, 点Pの座標は $\left(\sqrt{\overset{6}{\boxed{\ 8\ }}} - \overset{2}{\boxed{\ 9\ }},\ \sqrt{\overset{6}{\boxed{\ 10\ }}} - \overset{1}{\boxed{\ 11\ }}\right)$ である.

(ii) θ が実数全体を動くとき, 点Pの軌跡は

$$x^2 + y^2 + \underset{4}{\boxed{\ 12\ }}\,x + \underset{2}{\boxed{\ 13\ }}\,y - \underset{3}{\boxed{\ 14\ }} = 0$$

である.

(3) 2次関数 $f(x)$ は, すべての実数 x について

$$\int_0^x f(t)\,dt = xf(x) - \frac{4}{3}x^3 + ax^2$$

を満たす. ただし, a は実数である. また, $f(0) = a^2 - a - 6$ である. このとき,

(i) $f(x) = \overset{2}{\boxed{\ 15\ }}\,x^2 - \overset{2}{\boxed{\ 16\ }}\,ax + (a + \overset{2}{\boxed{\ 17\ }})(a - \overset{3}{\boxed{\ 18\ }})$ である.

(ii) 方程式 $f(x) = 0$ が少なくとも1つの正の実数解をもつような a の値の範囲は

$$\underset{-}{\boxed{\ 19\ }}\underset{2}{\boxed{\ 20\ }} < a \leqq \underset{1}{\boxed{\ 21\ }} + \sqrt{\underset{1}{\boxed{\ 22\ }}\underset{3}{\boxed{\ 23\ }}}$$

である.

(4) $\{a_n\}$ は, 数字の1と2だけで作ることのできる自然数を小さい順に並べた数列である.

おもしろい！

$$\{a_n\} : 1,\ 2,\ 11,\ 12,\ 21,\ 22,\ 111,\ \cdots$$

メモ

このとき,

(i) $a_{10} = \overset{1}{\boxed{\ 24\ }}\overset{2}{\boxed{\ 25\ }}\overset{2}{\boxed{\ 26\ }}$, $a_{15} = \overset{1}{\boxed{\ 27\ }}\overset{1}{\boxed{\ 28\ }}\overset{1}{\boxed{\ 29\ }}\overset{1}{\boxed{\ 30\ }}$ である.

(ii) $\displaystyle\sum_{k=7}^{14} a_k = \underset{1}{\boxed{\ 31\ }}\underset{3}{\boxed{\ 32\ }}\underset{3}{\boxed{\ 33\ }}\underset{2}{\boxed{\ 34\ }}$ である.

(iii) $\{a_n\}$ のうち, m 桁である項の総和は $\dfrac{\overset{2}{\boxed{\ 35\ }}^{\,m-1}\left\{\left(\overset{1}{\boxed{\ 36\ }}\overset{0}{\boxed{\ 37\ }}\right)^m - \overset{1}{\boxed{\ 38\ }}\right\}}{\underset{3}{\boxed{\ 39\ }}}$ である.

(1) (i) $f(x,y)=2x^2+11xy+(3y-2)(4y+1)$

$$=\underline{(x+4y+1)(2x+3y-2)}$$ //

$$\begin{array}{ccc} 2 & \times & 3y-2 \\ 1 & & 4y+1 \end{array}$$

(ii) x,y が自然数であることから，

$x+4y+1 \geqq 6$，$2x+3y-2 \geqq 3$

$\therefore$ $x+4y+1=7$，$2x+3y-2=8$ または，$x+4y+1=8$，$2x+3y-2=7$

または，$x+4y+1=14$，$2x+3y-2=4$

このうち，x,y が自然数となるのは，2番目のとき で，$\underline{x=3,\ y=1}$ //

(2) (i) $x+4\sin\theta+1-(-x+4\cos\theta-3)=0$ より，

$2x=-4(\sin\theta-\cos\theta)-4$

$\therefore$ $x=-2\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)-2$，$y=2\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-1$

これに $\theta=\frac{\pi}{12}$ を代入して，$x=-2\sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-2$，$y=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3}-1$

$\therefore$ $\underline{P(\sqrt{2}-2,\ \sqrt{6}-1)}$ //

(ii) (i) より，$x=2\cos\theta-2\sin\theta-2$　$\therefore$ $\cos\theta-\sin\theta=\frac{1}{2}x+1$ …①

$y=2\sin\theta+2\cos\theta-1$　$\therefore$ $\cos\theta+\sin\theta=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$ …②

①と②の両辺を2乗して足すと，$2=\frac{1}{4}x^2+x+1+\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}$

$\therefore$ $\underline{x^2+y^2+4x+2y-3=0}$ //

(3) 与式の両辺を x で微分すると，
(i)

$f(x)=f(x)+xf'(x)-4x^2+2ax$

$\therefore$ $x(f'(x)-4x+2a)=0$

これがすべての x で成り立つので，$f'(x)=4x-2a$

$\therefore$ $f(x)=2x^2-2ax+C$　（C：積分定数）

$f(0)=a^2-a-6$ より $C=a^2-a-6$

$\therefore$ $\underline{f(x)=2x^2-2ax+(a+2)(a-3)}$ //

3枚目へつづく

(3) のつづき

(ii) $f(x)=0$ が少なくとも1つの正の実数解をもつ

$\iff f(0)<0$ または $(D \geqq 0$ かつ 軸が正$)$

$\iff (a+2)(a-3)<0$ または $\left(\frac{D}{4}=a^2-2(a+2)(a-3)\geqq 0\right.$ かつ $\left.\frac{a}{2}>0\right)$

$\iff -2<a<3$ または. $(a^2-2a-12\leqq 0$ かつ $a>0)$

$\iff -2<a<3$ または. $0<a\leqq 1+\sqrt{13}$

$\iff \underline{-2<a\leqq 1+\sqrt{13}}$ //

(4) (i) $\{a_n\}$ の中で l 桁のものは 2^l 個ある

∴ a_{10} は 3桁の小さい方から 4番目.

111, 112, 121, 122　　∴ $\underline{a_{10}=122}$ //

同様に考えると. a_{15} は 4桁の最も小さいもの

∴ $\underline{a_{15}=1111}$ //

(ii) $\sum_{k=7}^{14} a_k$ は 3桁のものすべての和なので.

$111+112+121+122+211+212+221+222$

333　333　333　333

∴ $333\times 4=\underline{1332}$ //

(iii) (ii) と同様に考えて. m 桁のものは 2^m 個あり.

足して, $\underbrace{33\cdots3}_{m桁}$ になるものが 2^{m-1} 組ある.

$$∴ (総和)=(3+30+300+\cdots+\underbrace{300\cdots0}_{m桁})\cdot 2^{m-1}$$

$$=\frac{3(1-10^m)}{1-10}\cdot 2^{m-1}$$

$$=\underline{\frac{2^{m-1}\{10^m-1\}}{3}}$$ //