

2015年 経済学部 第3問

3 実数  $\theta$  は  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  を満たすとする.  $O(0, 0, 0)$  を原点とする座標空間の3点

$$A(\cos^2 \theta, \sin \theta, 1 + \sin^2 \theta), \quad B(\sin \theta, 0, -\sin \theta), \quad C(1, \cos 2\theta - \cos^2 \theta, 1)$$

に対し, それぞれ  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ ,  $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$  とおく.

(1)  $\vec{b}$  は零ベクトルではないとする. 4点  $O, A, B, C$  が同一平面上にあるならば,

$$\theta = \frac{\boxed{27} \boxed{28}}{\boxed{29}} \pi \text{ である.}$$

次に  $\theta = \frac{\pi}{6}$  とし, 以下このときの3点  $A, B, C$  を考える. また, 3点  $O, B, C$  の定める平面を  $\alpha$  とする.

(2) 点  $P$  は  $\alpha$  上の点で,  $|\overrightarrow{AP}|$  が最小になるものとする. このとき,

$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{b} = \boxed{30}, \quad \overrightarrow{AP} \cdot \vec{c} = \boxed{31}$$

が成り立つ. また,  $\overrightarrow{OP}$  を  $\vec{b}, \vec{c}$  を用いて表すと

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\boxed{32} \boxed{33}}{\boxed{34}} \vec{b} + \frac{\boxed{35} \boxed{36}}{\boxed{37} \boxed{38}} \vec{c}$$

となる. ただし,  $\vec{u}, \vec{v}$  はベクトル  $\vec{u}$  と  $\vec{v}$  の内積を表す.

(3) 三角形  $OBC$  の面積は  $\frac{1}{8} \sqrt{\frac{\boxed{39} \boxed{40}}{\boxed{41}}}$  であり,  $|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{\frac{\boxed{42}}{\boxed{43} \boxed{44}}}$  なので, 四面体  $OABC$

の体積は  $\frac{\boxed{45}}{\boxed{46}}$  となる.