

2015年 環境情報学部 第1問

1  $n$  を自然数とする. 表と裏が  $\frac{1}{2}$  の確率で出現するコインを  $n$  回繰り返し投げる試行をおこなう. 各試行に対して  $n$  個の数  $X_1, \dots, X_n$  をつぎのように定義する.

$$X_i = \begin{cases} X_{i-1} + 1 & (i \text{ 回目の結果が表の場合}) \\ X_{i-1} + 2 & (i \text{ 回目の結果が裏の場合}) \end{cases}$$

ただし  $X_0 = 0$  とする.  $X_1, X_2, \dots, X_n$  のいずれかが値  $k$  ( $1 \leq k \leq 2n$ ) と等しくなる確率を  $P(n, k)$  と記す. 例えば,  $n = 1$  ならば  $P(1, 1) = \frac{1}{2}$ ,  $P(1, 2) = \frac{1}{2}$  となる.  $n = 2$  ならば  $P(2, 1) = \frac{1}{2}$ ,

$$P(2, 4) = \frac{1}{2} \text{ となる.}$$

$3 \leq k \leq n$  とする.  $X_i = k$  となるのは,  $X_{i-1} = k-1$  で  $i$  回目の結果が表となるか, あるいは  $X_{i-1} = k-2$  で  $i$  回目の結果が裏となるかのいずれかの場合である. したがって

$$P(n, k) = \frac{3}{4} P(n, k-1) + \frac{5}{6} P(n, k-2) \quad (3 \leq k \leq n)$$

が成り立つ.

いまコインを 10 回投げる試行を考える. このとき

$$P(10, 2) = \frac{7}{8}, \quad P(10, 5) = \frac{9}{11} \frac{10}{12}$$

である.