0002176543287999

慶應義塾大学

2016年 理工学部 第1問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の $\boxed{}$ を埋めよ．

(1) 2016の正の約数は全部で $\boxed{ア}$ 36 個あり，それらの平均は $\boxed{イ}$ 182 である．

(2) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする．座標平面上に3点 $P_0(1,\ 0)$，$P_1(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$P_2(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ がある．x 軸に関して，点 P_2，P_1 と対称な点をそれぞれ P_3，P_4 とし，さらに，四角形 $P_1P_2P_3P_4$ の面積を $S_1(\theta)$，三角形 $P_0P_1P_4$ の面積を $S_2(\theta)$ とする．

(i) $S_1\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\boxed{ウ}$ $\sqrt{3}$ である．

(ii) $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S_1(\theta)}{S_2(\theta)}=\boxed{エ}$ 9 である．

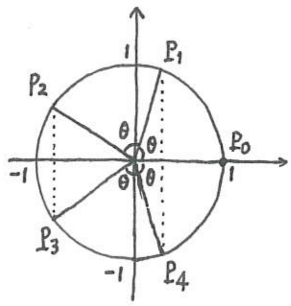
(iii) $S_1(\theta)$ は $\cos\theta=\boxed{オ}$ $\dfrac{-1+\sqrt{7}}{4}$ のとき最大値 $\boxed{カ}$ $\dfrac{10+7\sqrt{7}}{16}$ をとる．

(1) $2016=2^5\cdot3^2\cdot7$　∴ 正の約数の個数は，$6\times3\times2=\underline{36個}$

それらの総和は，$(1+2+2^2+\cdots+2^5)(1+3+3^2)(1+7)=63\cdot13\cdot8$

∴ それらの平均は，$\dfrac{63\cdot13\cdot8}{36}=\underline{182}$

(2) (i) 原点をOとして，



$$S_1\left(\frac{\pi}{3}\right)=\triangle P_1OP_4+2\triangle P_1OP_2+\triangle P_2OP_3$$
$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\frac{2\pi}{3}+2\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\left(2\pi-\frac{4}{3}\pi\right)$$
$$=\underline{\sqrt{3}}$$

(ii) (i)と同様にして，

$$S_1(\theta)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin2\theta+2\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin(2\pi-4\theta)$$
$$=\frac{1}{2}\sin2\theta+\sin\theta-\frac{1}{2}\sin4\theta\ \cdots(*)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot2\sin\theta\cos\theta+\sin\theta-\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\sin\theta\cos\theta(1-2\cos^2\theta)$$
$$=\sin\theta(-\cos\theta+1+4\sin^2\theta\cos\theta)\ \cdots(**)$$

$$S_2(\theta)=\frac{1}{2}\cdot2\sin\theta(1-\cos\theta)=\sin\theta(1-\cos\theta)$$

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{S_1(\theta)}{S_2(\theta)}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta(1-\cos\theta+4\sin^2\theta\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}=\lim_{\theta\to+0}\left(1+\frac{4(1-\cos^2\theta)\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)=\lim_{\theta\to+0}\left(1+4(1+\cos\theta)\cos\theta\right)=\underline{9}$$

(iii) (*)より，

$$S_1'(\theta)=\cos2\theta+\cos\theta-2\cos4\theta$$
$$=-16\cos^4\theta+18\cos^2\theta+\cos\theta-3$$
$$=-(\cos\theta-1)(2\cos\theta+1)(8\cos^2\theta+4\cos\theta-3)$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<\cos\theta<1$　∴ $S_1'(\theta)=0$ となるのは，$\cos\theta=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{4}$　このとき，$\sin\theta=\dfrac{1+\sqrt{7}}{4}$

2016年 理工学部 第1問　　2枚目／2枚

$\boxed{1}$ 次の $\boxed{}$ を埋めよ.

(1) 2016の正の約数は全部で $\boxed{ア}$ 個あり，それらの平均は $\boxed{イ}$ である.

(2) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする. 座標平面上に3点 $P_0(1,\ 0)$, $P_1(\cos\theta,\ \sin\theta)$, $P_2(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ がある. x 軸に関して，点 P_2, P_1 と対称な点をそれぞれ P_3, P_4 とし，さらに，四角形 $P_1P_2P_3P_4$ の面積を $S_1(\theta)$，三角形 $P_0P_1P_4$ の面積を $S_2(\theta)$ とする.

(i) $S_1\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\boxed{ウ}$ である.

(ii) $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S_1(\theta)}{S_2(\theta)}=\boxed{エ}$ である.

(iii) $S_1(\theta)$ は $\cos\theta=\boxed{オ}$ のとき最大値 $\boxed{カ}$ をとる.

(2)(iii)のつづき

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $\cos\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{4}$ として，増減表をかくと次のようになる

θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$S_1'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S_1(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

.

$\therefore$ $\underline{\cos\theta=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{4}}$ // のとき. 最大となる. (**)より,

$$S_1(\alpha)=\frac{1+\sqrt{7}}{4}\left(\frac{1-\sqrt{7}}{4}+1+4\cdot\frac{8+2\sqrt{7}}{16}\cdot\frac{-1+\sqrt{7}}{4}\right)$$

$$=\frac{1+\sqrt{7}}{4}\cdot\frac{13+\sqrt{7}}{8}$$

$$=\underline{\frac{10+7\sqrt{7}}{16}}\ //$$