2017年 理工学部 第1問

$\boxed{1}$ 次の各問いに答えよ．

(1) α，ω は定数で，$\omega > 0$ とする．媒介変数 t で表された曲線

$$x = 2\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right), \quad y = \sin(\omega t + \alpha)$$

について，t を消去して x，y の方程式を求める．$\alpha = \dfrac{2}{3}\pi$ のとき，求める方程式は $\boxed{\text{ア}}$ である．また，$-\dfrac{\pi}{3} < \alpha < \dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$\beta = \sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right)$ とおくと，求める方程式は

$$\boxed{\text{イ}}\,x^2 - \boxed{\text{ウ}}\,xy + \boxed{\text{エ}}\,y^2 = 1$$

である．ただし，$\boxed{\text{イ}}$，$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ には β の式を書きなさい．

(2) i を虚数単位とし，集合 L と M を

$$L = \{z \mid z \text{は整数}\, a,\ b \text{を用いて}\, z = a + bi \text{と表される複素数}\}$$

$$M = \left\{z \,\middle|\, z \in L,\ \frac{5}{z} \in L,\ |z| \neq 1,\ \left|\frac{5}{z}\right| \neq 1\right\}$$

で定める．複素数 $z = a + bi$ に対して，$z \in L$ ならば $|z|^2 = \boxed{\text{オ}}$ は整数である．また，$z \in M$ ならば $|z|^2 = \boxed{\text{カ}}$ であり，集合 M の要素の個数 $n(M)$ は $\boxed{\text{キ}}$ である．集合 M の要素 z のうち，実部が最も大きくかつ虚部が正となる z は $\boxed{\text{ク}}$ である．

(3) 関数 $f(x)$ を $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ と定め，$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を用いて関数 $g(t)$ を $g(t) = f^{-1}(t)$ と定める．このとき，関数 $G(x) = \boxed{\text{ケ}}$ を用いて $g''(t) = G(g(t))$ と表すことができる．