2017年 商学部 第2問

$\boxed{2}$ A社は工場$\mathrm{F_A}$で商品$\mathrm{P_A}$を製造している．商品$\mathrm{P_A}$の製造費用を表す変数は，製造量xの関数であるとする．この関数を$c(x)$で表す．以下の分析を容易にするため，$c(x)$は区間$x \geqq 0$を定義域とする関数とし，$c(0) = 0$とする．また，正の実数uに対して，関数$c(x)$の$x = u$における微分係数が定まるとし，その値を$x = u$における限界費用といい，$m(u)$で表す．さらに，$a(x) = \dfrac{c(x)}{x}$と定め，正の実数uに対して，$a(u)$を$x = u$における平均費用という．ここで，

$$m(x) = x^2 - 8x + 17 \qquad \cdots ①$$

であることがわかったとする．

(1) 区間$x > 0$において，限界費用が最小となる製造量をx_mで表すと$x_m = \boxed{14}$であり，平均費用が最小となる製造量をx_aで表すと$x_a = \boxed{15}$である．

(2) $\displaystyle\int_{x_m}^{x_a+1} |m(x) - a(x)|\,dx = \frac{\boxed{16}\boxed{17}}{\boxed{18}}$である．

(3) この問いでは，限界費用$m(x)$を特定する式①は仮定しないことにする．その場合でも，ある$\overline{x} > 0$に対して，平均費用$a(x)$が区間$0 < x \leqq \overline{x}$において単調に減少するならば，すなわち，$0 < u < v \leqq \overline{x}$ならば$a(u) > a(v)$となるならば，

$$x_1 + x_2 \leqq \overline{x}, \quad x_1 > 0, \quad x_2 > 0$$

を満たす任意のx_1，x_2に対して，

$$c(x_1 + x_2) < c(x_1) + c(x_2)$$

となることを証明せよ．

(4) B社は工場$\mathrm{F_B}$で商品$\mathrm{P_A}$と同等な商品$\mathrm{P_B}$を製造している．商品$\mathrm{P_B}$の製造費用は，商品$\mathrm{P_A}$の製造費用と同じであるとする．すなわち，B社における商品$\mathrm{P_B}$の製造費用は，製造量xの関数$c(x)$で定まる．
ここで，A社がB社を買収したとし，商品の製造はA社が工場$\mathrm{F_A}$ですべてまとめて行うこととする．（商品が同等なので，工場$\mathrm{F_A}$で製造した商品$\mathrm{P_A}$をB社の顧客に提供しても何ら問題はない．また，このとき，工場$\mathrm{F_B}$における製造量は0になる．）買収前と比較して，製造を集約することによって両社合わせた製造費用が節約される度合いを求めてみよう．
買収時点での商品$\mathrm{P_A}$と商品$\mathrm{P_B}$の製造量を，それぞれu_1とu_2（$u_1 > 0$，$u_2 > 0$）とする．このとき，節約される費用は，再び，限界費用$m(x)$に対して式①を仮定すると，

$$u_1 u_2 \left(\boxed{\text{イ}} \right)$$

となる．（もしこの値が負となる場合は，製造費用は節約ではなく追加されることになる．）