

2017年 環境情報学部 第2問

2 つぎの命題を数学的帰納法を用いて証明する．選択肢よりもっとも適切なものを選びなさい．証明後の例については，解答の数字をマークしなさい．

命題 すべての自然数は $2^i 3^j$ ($i, j = 0, 1, 2, \dots$) の形の数の和で書くことができる．ただし各項は他の項を割ることはないとする．

証明 $1 = 2^0 3^0$ より，1 は表すことができる． n より小さな自然数に対して命題が成り立つと仮定して n の場合を示す． n が のとき， $\frac{n}{\text{16}}$ は n より小さいので

$$\frac{n}{\text{16}} = a_1 + a_2 + \dots + a_\ell$$

と命題を満たす形に書くことができる．すなわち，各項は $2^i 3^j$ の形をしており，他の項を割ることはない．したがって

$$n = \text{16} a_1 + \text{16} a_2 + \dots + \text{16} a_\ell$$

は命題を満たすことがわかる．

n が のとき，自然数 k を $3^k \leq n < 3^{\text{18}}$ となるように選ぶ． $n = 3^k$ であれば命題を満たす． $3^k < n$ のとき， $n - 3^k$ は なので，前半の議論により

$$n - 3^k = \text{20} b_1 + \text{20} b_2 + \dots + \text{20} b_m$$

と命題を満たす形に書くことができる．よって

$$n = \text{20} b_1 + \text{20} b_2 + \dots + \text{20} b_m + 3^k$$

である． $b_s \leq \frac{n - 3^k}{\text{20}} < \frac{3^{\text{21}} - 3^k}{\text{20}} = 3^{\text{22}}$ より， b_s が 3^k で割られることはない．さらに， b_s が 3^k を割ることもない．よって n は命題を満たす形に書くことができる．

以上のことから n の場合も命題が成立し，数学的帰納法により命題が示された．

(証明終)

- 選択肢 (1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) $k - 1$
 (5) k (6) $k + 1$ (7) 偶数 (8) 奇数

例えば，2017 を証明の考え方によって決まる命題を満たす形に表すと

$$2017 = 2^{\text{23}} 3^{\text{24}} + 2^{\text{25}} 3^{\text{26}} + 2^{\text{27}} 3^{\text{28}} + 2^{\text{29}} 3^{\text{30}}$$

となる．ただし，項は2のべきの大きい順 (> > >) とする．