名古屋市立大学

2013年 医学部 第4問

$\boxed{4}$ 原点をOとする xyz 空間内に1辺の長さが1の正四面体OPQRがある．点P，Q，Rを通り z 軸に平行な3直線と xy 平面との交点をそれぞれP′，Q′，R′とするとき，次の問いに答えよ．

(1) △PQR，△P′Q′R′の面積をそれぞれ S，S_1 とする．P，Q，Rの3点を通る平面と xy 平面のなす角を θ とするとき，$S_1 = S|\cos\theta|$ を示せ．

(2) Oが△P′Q′R′の周上を含む内部にあるとき，z 軸と△PQRの交点をAとする．このとき正四面体OPQRの体積 V は $V = \dfrac{1}{3}\mathrm{OA}\cdot S_1$ となることを示し，S_1 の最小値を求めよ．

(3) Oが△P′Q′R′の外部にあり，線分OP′と線分Q′R′が交点Bをもつとき，点Bを通り z 軸に平行な直線と，直線OPおよび直線QRとの交点をそれぞれC，Dとする．このとき四角形OQ′P′R′の面積を S_2 とすると $V = \dfrac{1}{3}\mathrm{CD}\cdot S_2$ となることを示し，S_2 の最大値を求めよ．