岩手大学

2010年 教育学部 第3問

数理 石井K

3 数列 $\{a_n\}$ は等比数列で，その公比は0以上の実数であるとする．自然数 n に対して

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,\quad T_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k,\quad U_n=\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2$$

とするとき，n が奇数ならば，$S_n\cdot T_n=U_n$ が成り立つことを示せ．

$a_n=a\cdot r^{n-1}$ $(r\geqq 0)$ とおくと．（初項を a，公比を r とした）

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\quad\cdots①$$

また，$T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cdot a_k=\underbrace{\sum_{k=1}^{n}a\cdot(-r)^{n-1}}$

これは．初項 a，公比 $-r$ の等比数列の和

$$\therefore\ T_n=\frac{a(1-(-r)^n)}{1+r}\quad\cdots②$$

①，②より，

$$S_n\cdot T_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}\cdot\frac{a\{1-(-r)^n\}}{1+r}$$

$$=\frac{a^2(1-r^n)\{1-(-r)^n\}}{1-r^2}$$

ここで，n が奇数のとき．$1-(-r)^n=1+r^n$ が成り立つから．

$$S_n\cdot T_n=\frac{a^2(1-r^{2n})}{1-r^2}$$

一方，数列 $\{{a_n}^2\}$ は初項が a^2，公比が r^2 の等比数列であるから

$$U_n=\frac{a^2(1-r^{2n})}{1-r^2}$$

以上より，n が奇数ならば $S_n\cdot T_n=U_n$ が成り立つ ▨