0001659630438999

慶應義塾大学

2014年 経済学部 第2問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ a, b, c を実数とする．x の関数 $F(x)$ を

$$F(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx+c$$

と定め，

$$f(x)=F'(x)$$

とおく．関数 $F(x)$ は $x=\alpha$ において極大に，$x=\beta$ において極小になるとする．点 $(\alpha,\ f(\alpha))$, $(\beta,\ f(\beta))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線をそれぞれ ℓ_α, ℓ_β とする．

(1) 直線 ℓ_α と ℓ_β の交点の座標は

$$\left(\frac{\boxed{15}}{\boxed{16}}\alpha+\frac{\boxed{17}}{\boxed{18}}\beta,\ \frac{\boxed{19}\,\boxed{20}}{\boxed{21}}(\beta-\alpha)^2\right)$$

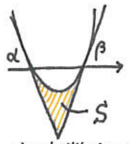
15: 1　16: 2　17: 1　18: 2　19: −　20: 1　21: 2

である．

(2) 曲線 $y=f(x)$ と直線 ℓ_α, ℓ_β とで囲まれた図形の面積を S とすると，

$$S=\frac{\boxed{22}}{\boxed{23}\,\boxed{24}}(\beta-\alpha)^3$$

22: 1　23: 1　24: 2



である．必要なら次の公式を使ってよい．r を実数とすると

$$\int(x+r)^2\,dx=\frac{1}{3}(x+r)^3+C \quad (C\text{ は定数})$$

(3) 実数 a, b が不等式

$$0\leqq a\leqq 2,\quad 2a-4\leqq b\leqq 2a-2$$

をみたす範囲を動くとき，S の最大値は $\dfrac{\boxed{25}\,\boxed{26}}{\boxed{27}}$，最小値は $\dfrac{\boxed{28}\,\boxed{29}}{\boxed{30}}$ である．

25: 1　26: 6　27: 3　29: 2　30: 3

(1) $F'(x)=x^2+2ax+b$

$\therefore$ $f(x)$ の x^2 の係数は 1 で $f(x)=0$ の解は $x=\alpha,\beta$ であるから

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$

$\quad =x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$

$f'(x)=2x-(\alpha+\beta)$

$\therefore\ \ell_\alpha:\ y=(\alpha-\beta)(x-\alpha)+f(\alpha)$

$\therefore\ y=(\alpha-\beta)x-\alpha^2+\alpha\beta$

同様にして．

$\ell_\beta:\ y=(\beta-\alpha)x-\beta^2+\alpha\beta$

これらの交点を求めると，

$\left(\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta,\ -\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^2\right)$ //

(2) $S=\displaystyle\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)-\{(\alpha-\beta)x-\alpha^2+\alpha\beta\}\,dx$

$\quad +\displaystyle\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f(x)-\{(\beta-\alpha)x-\beta^2+\alpha\beta\}\,dx$

$\quad =\displaystyle\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(x-\alpha)^2dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(x-\beta)^2dx$

$\quad =\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}$

$\quad =\frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^3$

$\quad =\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3$ //

(3) 解と係数の関係より．

$\alpha+\beta=-2a$, $\alpha\beta=b$

$\therefore\ (\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$\quad =4a^2-4b$

$\therefore\ \beta-\alpha>0$ より．$\beta-\alpha=2\sqrt{a^2-b}$

$\therefore\ S=\frac{1}{12}\cdot\left(2\sqrt{a^2-b}\right)^3$

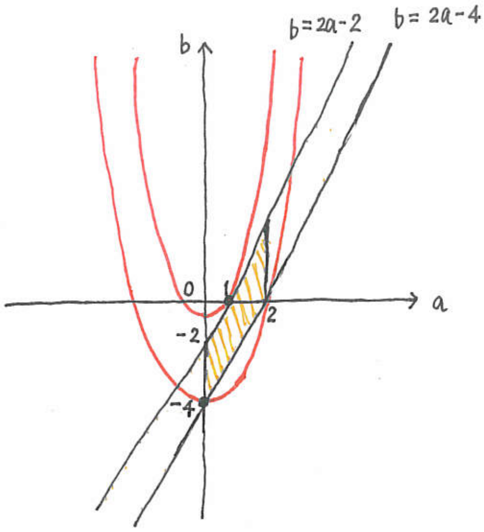
$\quad =\frac{2}{3}\left(\sqrt{a^2-b}\right)^3$

2枚目へつづく

数理 石井K

(3)のつづき.

$a^2-b=k$ とおくと, $b=a^2-k$



∴右の図より, 不等式が表す領域と共有点をもつような k の値の範囲は

$-4 \leqq -k \leqq -1$ すなわち $1 \leqq k \leqq 4$

$$\therefore\ S=\frac{2}{3}(a^2-b)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot k^{\frac{3}{2}}$$

より, $\frac{2}{3}\cdot 1^{\frac{3}{2}} \leqq S \leqq \frac{2}{3}\cdot 4^{\frac{3}{2}}$

$$\therefore\ \frac{2}{3} \leqq S \leqq \frac{16}{3}$$

∴ Sの最大値は $\frac{16}{3}$,最小値は $\frac{2}{3}$ //