

2016年 理工学部 第2問

2  $f(x)$  は2次関数であり,  $f(0) = f(1) = 0$  を満たすとする.

(1)  $a = \frac{1}{2}f''(0)$  とする. このとき,  $f(x)$  は  $a$  を用いて  $f(x) = \boxed{\text{キ}}$  と表される.

(2) 定積分

$$\int_0^1 \{(f'(x) - x)^2 - f(x)\} dx$$

の値が最も小さくなるのは  $f(x) = \boxed{\text{ク}}$  のときである. また, そのときの定積分の値は  $\boxed{\text{ケ}}$  である.

以下では,  $f(x) = \boxed{\text{ク}}$ ,  $m = \boxed{\text{ケ}}$  とする.

(3) 関数  $h(x)$  は  $h(0) = h(1) = 0$  を満たし, その導関数  $h'(x)$  は連続であるとする. さらに,  $I$  と  $J$  を

$$I = \int_0^1 \{(f'(x) + h'(x) - x)^2 - (f(x) + h(x))\} dx$$

$$J = \int_0^1 \{(f'(x) - x)^2 - f(x)\} dx + \int_0^1 (h'(x))^2 dx$$

で定める. このとき, 等式

$$I = J$$

を証明しなさい.

(4) 関数  $g(x)$  は  $g(0) = g(1) = 0$  を満たし, その導関数  $g'(x)$  は連続であるとする. このとき, 不等式

$$\int_0^1 \{(g'(x) - x)^2 - g(x)\} dx \geq m$$

を証明しなさい.