

2016年 経済学部 第2問

2 以下の条件で定められる数列  $\{a_n\}$  がある.

$$a_1 = \frac{1}{10}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{100}a_n + \frac{1}{10} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1)  $\{a_n\}$  の階差数列  $\{b_n\}$  を  $b_n = a_{n+1} - a_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) で定める.  $\{b_n\}$  は等比数列で, 初項を  $\frac{1}{10^p}$ , 公比を  $\frac{1}{10^q}$  とおくと,  $p = \boxed{13}$ ,  $q = \boxed{14}$  となる. ゆえに,  $\{b_n\}$  の第  $n$  項を

$$b_n = \frac{1}{10^{rn+s}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおくと,  $r = \boxed{15}$ ,  $s = \boxed{16}$  となる. さらに,  $\{a_n\}$  の第  $n$  項は,

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = \frac{1}{10^t} \left( 1 - \frac{1}{10^{un}} \right) \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

と求められる. ここで,  $t = \boxed{20}$ ,  $u = \boxed{21}$ ,  $v = \boxed{22}$  である.

(2)  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{10^{2k} a_k a_{k+1}}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) とおく. 関係式

$$\frac{b_k}{a_k a_{k+1}} = \frac{\boxed{23} \boxed{24}}{a_k} + \frac{\boxed{25} \boxed{26}}{a_{k+1}} \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

を用いて計算すると,

$$S_n = \frac{10^w \left( 1 - \frac{1}{10^{xn}} \right)}{1 - \frac{1}{10^{yn+z}}}$$

となる. ここで,  $w = \boxed{27}$ ,  $x = \boxed{28}$ ,  $y = \boxed{29}$ ,  $z = \boxed{30}$  である.

(3)  $(100^{n+1} - 1)S_n$  は  $\boxed{31}n + \boxed{32} \boxed{33}$  桁の整数になる.