0002502637947999

慶應義塾大学

2017年 環境情報学部 第2問

$\boxed{2}$ つぎの命題を数学的帰納法を用いて証明する．選択肢よりもっとも適切なものを選びなさい．証明後の例については，解答の数字をマークしなさい．

命題 すべての自然数は 2^i3^j（i，$j=0$，1，2，…）の形の数の和で書くことができる．ただし各項は他の項を割ることはないとする．

証明 $1=2^03^0$ より，1は表すことができる．n より小さな自然数に対して命題が成り立つと仮定して n の場合を示す．n が $\boxed{15}$ のとき，$\dfrac{n}{\boxed{16}}$ は n より小さいので

$$\frac{n}{\boxed{16}}=a_1+a_2+\cdots+a_\ell$$

と命題を満たす形に書くことができる．すなわち，各項は 2^i3^j の形をしており，他の項を割ることはない．したがって

$$n=\boxed{16}\,a_1+\boxed{16}\,a_2+\cdots+\boxed{16}\,a_\ell$$

は命題を満たすことがわかる．

n が $\boxed{17}$ のとき，自然数 k を $3^k \leqq n < 3^{\boxed{18}}$ となるように選ぶ．$n=3^k$ であれば命題を満たす．$3^k<n$ のとき，$n-3^k$ は $\boxed{19}$ なので，前半の議論により

$$n-3^k=\boxed{20}\,b_1+\boxed{20}\,b_2+\cdots+\boxed{20}\,b_m$$

と命題を満たす形に書くことができる．よって

$$n=\boxed{20}\,b_1+\boxed{20}\,b_2+\cdots+\boxed{20}\,b_m+3^k$$

である．$b_s \leqq \dfrac{n-3^k}{\boxed{20}} < \dfrac{3^{\boxed{21}}-3^k}{\boxed{20}}=3^{\boxed{22}}$ より，b_s が 3^k で割られることはない．さらに，$\boxed{20}\,b_s$ が 3^k を割ることもない．よって n は命題を満たす形に書くことができる．

以上のことから n の場合も命題が成立し，数学的帰納法により命題が示された．

（証明終）

選択肢　（1）1　（2）2　（3）3　（4）$k-1$

（5）k　（6）$k+1$　（7）偶数　（8）奇数

例えば，2017を証明の考え方によって決まる命題を満たす形に表すと

$$2017=2^{\boxed{23}}3^{\boxed{24}}+2^{\boxed{25}}3^{\boxed{26}}+2^{\boxed{27}}3^{\boxed{28}}+2^{\boxed{29}}3^{\boxed{30}}$$

となる．ただし，項は2のべきの大きい順（$\boxed{23}>\boxed{25}>\boxed{27}>\boxed{29}$）とする．